



# ***Yachasun***

**Módulo autoinstructivo para 5.º de secundaria**  
**Área: Matemática**

***tarea***

## **Yachasun. Módulo autoinstructivo para 5.º de secundaria. Área: Matemática**

Forma parte de los materiales producidos por **TAREA Asociación de Publicaciones Educativas**, en el marco de los proyectos que desarrolla en la región Cusco:

- ~ “Contribuyendo al ejercicio de los derechos de los pueblos originarios en el Perú, mediante el fortalecimiento del derecho a la educación”, ejecutado junto con InteRed (España), gracias al apoyo financiero de la Junta de Castilla y León.
- ~ “Kawsayninchis. Revitalizando la cultura andina desde la comunidad y la escuela”, con el apoyo de Hei Verden de Noruega.
- ~ “Aprendiendo a vivir entre diversos: en defensa del derecho a una educación intercultural, a la igualdad de género y al ejercicio de una ciudadanía plena”, posible gracias al apoyo de Pan para el Mundo de Alemania.

### EQUIPO RESPONSABLE:

**Liliam Teresa Hidalgo Collazos**, Coordinación general  
**José Leonardo Piscoya Rivera** Coordinador pedagógico  
**Jesús Ríos Mencía**, Área Matemática  
**Norma Velarde Huanaco**, Área Ciencia y Tecnología  
**Rommel Vladimir Carbajal Valverde**, Área Ciencias Sociales  
**Fredy Palma Gamarra**, Área Comunicación  
**Oscar Euler Contreras Rozas**, revisión de enfoque de género

Foto de portada: Tejido de Chinchero (L. Piscoya, 2012)

Corrección de estilo: José Luis Carrillo Mendoza

Primera edición: 100 ejemplares

Lima, julio de 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú n.º 2020-04910.

Se terminó de imprimir en agosto de 2020 en: TAREA Asociación de Publicaciones Educativas. Parque Osos 161, Pueblo Libre. Lima 21, Perú.

De esta edición

© **TAREA Asociación de Publicaciones Educativas**  
Parque Osos 161, Pueblo Libre. Lima 21, Perú  
Teléfono: (51 1) 424 0997  
Dirección electrónica: [tarea@tarea.pe](mailto:tarea@tarea.pe)  
Página Web: [www.tarea.org.pe](http://www.tarea.org.pe)

Se permite la copia o la transmisión de partes o de toda esta obra sin requerir permiso previo; basta con citar la fuente.

Las ideas y opiniones contenidas en este documento son de responsabilidad de sus autores y no comprometen ni reflejan necesariamente la posición institucional de las entidades auspiciadoras:



Estimada y estimado estudiante:

Este año no es como los anteriores, por varios motivos. El más importante, porque te toca terminar la secundaria. A esto se ha sumado que debido a la emergencia sanitaria estás experimentando algo que nunca se había hecho en nuestro país: ¡hacer la vida escolar desde casa!

El Ministerio de Educación ha puesto en marcha una estrategia denominada “Aprendo en Casa”, y el gobierno nacional y los gobiernos regionales han decidido que **hay algunos aprendizajes que son prioritarios y que no deben ser descuidados**, porque son claves para el desempeño a lo largo de la vida y porque te permiten continuar con estudios



*Imagen tomada de: Sicuani Noticias (2013)*

superiores o te dediques a actividades y ocupaciones que respondan a tu proyecto de vida.

Este módulo autoinstrutivo es un esfuerzo adicional para acompañarte en este contexto tan particular. Su finalidad es **ofrecerte oportunidades para desarrollar tus competencias, aprender cómo hacer frente a la realidad en la que vives y profundizar en algunas temáticas que se están desarrollando a nivel nacional**.

Aprender por cuenta propia es algo que haces de manera cotidiana, aunque no te des cuenta de lo valiosos que son esos aprendizajes. En este material encontrarás una propuesta de experiencias complementarias a las que plantea “Aprendo en Casa” y, además, puedes explorarlo de acuerdo con tus posibilidades de tiempo y ritmo de trabajo.

Te invitamos a realizar estas **experiencias de aprendizaje** diseñadas especialmente para ti.

**tarea**

## Antes de empezar...

**Aprender de manera autónoma** es algo que el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) plantea como una de las competencias transversales a todas las áreas de trabajo en las escuelas. Ser competente para aprender de manera autónoma supone de parte de cada uno de nosotros tres cosas: ser capaces de **definir cuáles son nuestras metas** o qué queremos lograr; **organizarnos para llevar a cabo acciones que nos encaminen a lograr aprender** aquello que nos proponemos, y **monitorear e ir tomando decisiones para mejorar** aquello que no nos funciona e ir revisando en qué medida nos aproximamos a nuestras metas.

Dado que usar un módulo autoinstructivo supone algunos retos adicionales, te sugerimos considerar cuatro aspectos:



### Condiciones del lugar de trabajo

Para trabajar con este módulo conviene ubicar un lugar en el que haya **pocas distracciones**. Ese lugar puede estar dentro o fuera de casa, pero ten en cuenta que necesitas cierta **comodidad** para poder apoyar el texto y realizar las actividades que se proponen. ¡Cuida que la **iluminación** sea adecuada! No te coloques bajo el sol, pues el reflejo del papel puede dañar tus ojos... y considera que un espacio **bien ventilado** ayuda a mantener la atención durante más tiempo.



### Manejo del tiempo

Considera que es mejor iniciar y cerrar una actividad o experiencia completa y no “dejarla a medias”. Eso puede ayudarte a no olvidar lo que estás trabajando y a profundizar en tus reflexiones sobre las temáticas alrededor de las cuales se organiza cada módulo. Te recomendamos **programar alrededor de 40 minutos de trabajo** diario.

Ten en cuenta que en cada módulo se proponen una cantidad de **semanas de duración para cada experiencia**.



### Recursos necesarios

Ten a la mano los recursos que se necesitan para realizar el trabajo. En algunos módulos puedes requerir papeles adicionales (tal vez un cuaderno o un bloc u hojas que tengas a mano), o **herramientas** para realizar **experiencias de campo**. ¡Incluso vas a tener que recurrir a **personas de la comunidad** para acceder a saberes que ellos poseen!



### Dudas y consultas

Es probable que en algunos momentos surjan dudas sobre lo que estás leyendo y trabajando. Una primera alternativa puede ser **acudir a tus amigos** que están en tu mismo grado y que pueden ayudarte. ¡A veces entre dos o tres personas “sabemos más” de lo que sabemos de manera separada!

Si hay dudas que no logras resolver con tus amigas y amigos, puedes recurrir a los **profesores de TAREA**, que están dispuestos a acompañarte para aclarar tus dudas.

## ¿Qué vamos a lograr?

En este módulo se ha enfatizado el trabajo en torno a algunos de los desempeños que debes alcanzar al terminar tu vida escolar. Estos han sido tomados del Currículo Nacional de Educación Básica y de la Resolución Viceministerial 093-2020-MINEDU, que ha priorizado algunos logros para este año.

| COMPETENCIAS                                                     | CAPACIDADES                                                                                                                                         | ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE<br>DE LAS COMPETENCIAS EN MATEMÁTICA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Resuelve problemas de cantidad.</b>                           | Traduce cantidades a expresiones numéricas.<br>Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.                                            | Evalúa si estas expresiones cumplen con las condiciones iniciales del problema.<br>Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, los evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</b> | Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.<br>Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.                      | Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema.<br>Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, así como para evaluar funciones lineales.                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.</b>   | Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.<br>Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.                          | Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre transformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás.<br>Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.                                                                              |
| <b>Resuelve problema de gestión de datos e incertidumbre.</b>    | Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.<br>Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida. | Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada con su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; basado en esto, contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. |

# ¿Qué camino seguiremos?

En todas las **unidades de aprendizaje** de este módulo vas a encontrar una estructura que se repite con la finalidad de ayudarte a aprender y desarrollar tus competencias.

TAREA – CUSCO [2020]

Matemática – 5º de secundaria

Experiencia de Aprendizaje Nº 1

## El reservorio de agua de la comunidad



| Área       | Duración                            | Grado y sección | Elaboración |
|------------|-------------------------------------|-----------------|-------------|
| MATEMÁTICA | 3 semanas<br>Del 03 al 21 de agosto | 5ª              | Jesús Ríos  |

### ¿Qué vamos a aprender?

Estimada/o estudiante,  
Esta experiencia de aprendizaje te permitirá desarrollar las competencias y capacidades que aparecen en la siguiente tabla. Revisa los desempeños pues son conductas verificables que debes poder realizar al terminar esta experiencia.



Ejes: Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos, el manejo de conflictos / soberanía alimentaria y productiva

| COMPETENCIAS                                              | CAPACIDADES                                                                                                                 | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. | Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. | Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. |

ECUACIONES. Introducción. Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones con dos variables. Inecuaciones. Aplicaciones prácticas

### “Esto es importante porque...”

En la comunidad de Paucarcotto, hay un reservorio de agua. ¡Vamos a medir el caudal de agua que se consume en promedio diariamente!

Para este propósito necesitamos medir las dimensiones del reservorio, calcular el volumen y el régimen de entrada y salida de agua. ¿Se te ocurre alguna forma en la que podrías hacer esos cálculos? ¿Será posible calcular el tiempo que demoraría en llenarse el reservorio si la lluvia es escasa o, si por el contrario, es muy abundante? ¿Y si por algún motivo hubiera una fuga de agua, sería posible calcular cuánto agua se pierde y saber de cuánto tiempo se dispone para reparar la fuga? Esta actividad nos permitirá conocer las



herramientas matemáticas que necesitamos, así como algunas técnicas para realizar estas medidas. En esta unidad, aprenderás algunas herramientas y técnicas de cálculo, que te permitirán realizar esta experiencia de una forma sencilla y dinámica. Para lograrlo, comenzaremos por entender algunos conceptos útiles y necesarios sobre las ecuaciones, que serán nuestras herramientas matemáticas.

Imagen tomada de <https://www.facebook.com/367738548965836/posts/1699277283489636/>

### Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Para comenzar, vas a recurrir a las cosas que ya sabes. Como verás, hay mucha información y experiencias que has vivido que pueden ser útiles para lo que vas a aprender.

#### Actividad 1: Lo que sabemos...

Tener acceso al agua a lo largo de todo el año es importante por muchas razones. En la imagen de la izquierda puedes ver una de las utilidades que las personas hemos encontrado para ese recurso. ¿Sabes que están haciendo las mujeres fotografiadas? ¿De qué manera el agua es parte de los procesos de producción textil, agrícola y pecuaria en tu comunidad?

Conversa con personas de la generación de tus padres o de tus abuelos y pregúntales por sus impresiones acerca de cómo ha variado el acceso al agua en tu comunidad y si consideran que deberían tomarse decisiones comunales para su cuidado y almacenamiento.

Averigua a cargo de quiénes y cómo se decide en la comunidad el uso que se dará al agua.



Imagen tomada de <https://www.facebook.com/367738548965836/posts/1699277283489636/>

### Exploramos la temática

Como ves, hay algunas cosas que sabes sobre la temática que estamos trabajando. Ahora, vas a tener la oportunidad de ampliar esa información utilizando textos informativos.

Léelos con cuidado y señala o subraya las ideas más importantes que encuentres. Si lo prefieres, anota al margen palabras clave que te ayuden a recordar lo que dice el texto.

#### Actividad 2: Los diferentes tipos de ecuaciones

Texto 1

##### ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Ejemplo 1. En la feria del mercado de Anta, se ha comprado tres gallinas y cuatro cuyes medianos, y se ha pagado por todo 140 soles. Si dos cuyes valen lo mismo que una gallina, ¿cuánto cuesta cada gallina?

Designemos las variables:

X = precio de gallina Y = precio de cuy

Sabemos que:  $3X + 4Y = 140$  Además  $X = 2Y$

Entonces, para resolver podemos proceder de muchas maneras, si nuestro procedimiento es lógico será válido, ensayemos una forma, digamos reemplazando la equivalencia, en la primera ecuación, así:

$$3(2Y) + 4Y = 140$$

$$6Y + 4Y = 140$$

$$10Y = 140 \quad (Y = 140/10)$$

## ¿Qué vamos a aprender?

Una presentación breve en la que se plantea el propósito de aprendizaje de la experiencia que vas a desarrollar.

Como verás, allí se indica qué competencias, qué capacidades y qué desempeños verificables debes poder realizar.

Puedes reconocer esta sección porque en ella aparece un foco encendido.

## Esto es importante porque...

En esta sección encuentras una situación que te ayudará a comprender de qué manera lo que vas a aprender se conecta o se articula con una situación real de tu comunidad. En algunos casos, se trata de un problema por resolver, y en otros, de una situación que puede resultar interesante o importante para tu localidad.

## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Aquí encontrarás actividades destinadas a hacer las primeras averiguaciones sobre algo que ya conoces de manera básica y que puede serte de utilidad para comprender la información nueva que se te va a ofrecer.

## Exploramos la temática

La mayor parte del módulo está dedicada a ofrecerte información que te ayudará a comprender de manera más profunda la realidad. En algunos casos se trata de textos seleccionados, de ejercicios desarrollados o de explicaciones de ideas clave que necesitas para resolver situaciones cotidianas.

### Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído algunas descripciones sobre las ecuaciones de segundo grado, ha llegado el momento de verificar lo que has comprendido. A continuación, se proponen algunos ejercicios para ello.

#### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1.  $x^2 + 11x + 24 = 0$  (solución:  $x_1 = -3, x_2 = -8$ )
2.  $x^2 - 16x = -63$  (solución:  $x_1 = 4, x_2 = 9$ )
3.  $x^2 + 6x + 16 = 16$  (solución:  $x_1 = 0, x_2 = 6$ )

### ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces nueva información, es momento de ver de qué manera podrías utilizarla para explicar lo que sucede en tu localidad o en tu experiencia. Recuerda que puedes revisar, cada vez que sea necesario, los textos que has leído previamente. ¡Y a veces vale la pena realizar los ejercicios con ayuda de algún compañero o compañera!



#### EJEMPLOS DE APLICACION

Empecemos por resolver algunos retos para verificar lo que hemos comprendido:

1. Un reservorio para agua en Parccotica, internamente tiene las siguientes medidas, largo 4m, ancho 2m y 1.5m de altura.
  - a. ¿Cuál es la capacidad del reservorio en litros? Recuerda que el volumen se calcula en  $m^3$ , como el producto de los lados por la altura (en este caso, la profundidad del reservorio). Ten en cuenta que 1  $m^3$  equivale a 1000 litros
  - b. Si el nivel del agua está a 85 centímetros de la base del reservorio, ¿cuál es la cantidad de agua en  $m^3$  y en litros?
2. ¿En cuánto tiempo se vaciaría totalmente este reservorio, si el agua se evacua por la llave a razón de 21 litros por minuto? (Recuerda revisar primero tu cálculo del volumen de agua y ten en cuenta que 1  $m^3$  equivale a 1000 litros).
3. Si se abre una llave de ese mismo reservorio de agua y se vacía en 4 horas. Si cada hora se desocupa 1% de lo que había. Al cabo de las 4 horas, se cierra la llave y se encuentra que el reservorio tiene aún 3600 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua tenía inicialmente el reservorio?

### Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:



Lo aprendido: ¿qué se ahora que no sabía antes? ¿qué cosas necesito explorar más y qué dudas me quedan? ¿Cómo se relaciona esto con mi vida cotidiana?

Observa la fotografía de los estudios de la Municipalidad de Chinchaypujio (2017) para



mejorar los servicios de agua y saneamiento. ¿Se necesitan conocimientos matemáticos al realizar este tipo de trabajo? ¿Cuáles de los que has visto en esta experiencia crees que podrían utilizarse para calcular la capacidad de los reservorios de agua para las comunidades?

El proceso: ¿fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Qué recursos utilicé para aprender y a quiénes recurrí para aprender más? ¿A qué compañeros o compañeras puedo recurrir cuando tengo dificultades en comprender conceptos de matemáticas?

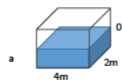
#### SOLUCIONARIO

1. Un reservorio para agua en Parccotica, internamente tiene las siguientes medidas, largo 4m, ancho 2m y 1.5m de altura.

- a) ¿Cuál es la capacidad del reservorio en litros?
- b) Si el nivel del agua está a 85 centímetros de la base del reservorio, ¿cuál es la cantidad de agua?

Solución:

- a) Como sabemos, el volumen total será:  $V = a \cdot b \cdot h$  y de acuerdo con las medidas del reservorio tenemos:  $a = 4m, b = 2m$  y  $h = 1.5m$



Reemplazando los valores:  
 $V = 4m \cdot 2m \cdot 1.5m = 12 m^3$ , es la capacidad del reservorio.  
Que también podemos expresarlo en litros, como un  $m^3$  equivalente 1000 litros, entonces la capacidad del reservorio será 12000 litros de agua.

## Verificamos lo comprendido

Como parte de la sección anterior, también encontrarás propuestas de actividades para verificar que estás comprendiendo la nueva información que vas leyendo. ¡Estos ejercicios son importantes para que compruebes qué cosas nuevas has aprendido!

## ¡Manos a la obra!

Esta sección tiene como propósito que puedas utilizar lo que has aprendido en contextos cotidianos o reales o en situaciones simuladas pero que puedan parecerse a las de tu experiencia como adolescente o integrante de una comunidad.

¡En algunos casos, la actividad final que se te propone es una evidencia compleja que requiere que utilices lo que ya sabes en combinación con lo descubiertos!

## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Para finalizar el trabajo de cada experiencia de aprendizaje se plantean algunas preguntas y actividades que pueden ayudarte a pensar acerca de lo que has aprendido y del proceso que has realizado para lograrlo.

Responder estas preguntas puede ayudarte a gestionar mejor tu tiempo, los recursos que utilizaste para aprender y a descubrir si empleaste alguna estrategia nueva.

## Solucionario

Al final de cada unidad de aprendizaje encontrarás pistas para verificar tus respuestas a los ejercicios y preguntas que se plantean a lo largo del material. Trata de no ir directamente a ellas para saber las respuestas... úsalas, más bien, para revisar tus aciertos y también para descubrir si hay puntos que debes retomar o continuar explorando y trabajando.

## ¿Cómo organizo mi tiempo?

Te ofrecemos a continuación una propuesta que te ayudará a gestionar el tiempo de modo que puedas realizar las actividades que te proponemos en este módulo autoinstrutivo.

| Unidad de aprendizaje                                                                                          | Núcleos temáticos                                                                                                                                                                                                                  | Ago. | Set. | Oct. | Nov. | Dic. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|
| Unidad de aprendizaje 1<br><b>¡Agua, agua!</b><br>ECUACIONES                                                   | Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones con dos variables. Inecuaciones. Aplicación práctica: midiendo el caudal en el reservorio comunal.                                                                              |      |      |      |      |      |
| Unidad de aprendizaje 2<br><b>¡Súbele el volumen!</b><br>GEOMETRÍA DEL ESPACIO                                 | Volúmenes regulares (cubo, cilindro). Volumen de la esfera. Volumen del cono y conos truncos. Volumen del cilindro. Aplicación práctica: calculando el volumen del reservorio comunal.                                             |      |      |      |      |      |
| Unidad de aprendizaje 3<br><b>¡Puedo calcular la productividad de la chacra!</b><br>ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD | Tablas de frecuencias. Representación gráfica. Medidas de centralización (media aritmética, moda, mediana y cuartil) y de dispersión. Probabilidad. Aplicación práctica: midiendo la productividad promedio de la chacra familiar. |      |      |      |      |      |
| Unidad de aprendizaje 4<br><b>¡Construyo un concentrador solar!</b><br>GEOMETRÍA ANALÍTICA                     | Ecuación de la circunferencia. Ecuación de la elipse. Ecuación de la parábola. Aplicación práctica: construyendo un concentrador solar para aprovechar la radiación en mi comunidad.                                               |      |      |      |      |      |
| Unidad de aprendizaje 5<br><b>¿Cuán antiguo es esto?</b><br>FUNCIONES                                          | Representaciones gráficas de funciones. Funciones exponenciales. Funciones logarítmicas. Aplicación práctica: datación por carbono 14 y su relación con las funciones.                                                             |      |      |      |      |      |

## Unidad de Aprendizaje N.º 1

## ¡Agua, agua!

| Área       | Duración                                               |
|------------|--------------------------------------------------------|
| Matemática | 3 semanas: del 17 de agosto al 4 de setiembre del 2020 |

## ¿Qué vamos a aprender?

Estimada y estimado estudiante:

Esta experiencia de aprendizaje te permitirá desarrollar las competencias y capacidades que aparecen en la siguiente tabla. Revisa los desempeños, pues son conductas verificables que debes poder realizar al terminar esta experiencia.



**Ejes:** Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos / Soberanía alimentaria y productiva.

| COMPETENCIAS                                                                                           | CAPACIDADES                                                                                                                    | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.                                              | Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.<br>Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. | Comprueba si la expresión algebraica usada tradujo o reprodujo las condiciones del problema.<br>Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, así como para evaluar funciones lineales. |
| <b>ECUACIONES.</b> Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones con dos variables. Inecuaciones. |                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

Existe en nuestro sistema de numeración una propiedad fundamental por la cual podemos igualar dos expresiones o cantidades que tienen o presentan el mismo valor; por ejemplo, si  $a = 5$  significa que **a** vale 5 unidades. A partir de este principio, podemos tener una expresión como:  $a + x = 8$ ; entonces, como **a** vale 5 unidades, **x** necesariamente vale 3. Esta es la semilla de la teoría de ecuaciones.

¿Y por qué se llama ecuación? Precisamente porque se trata de igualar dos cantidades. Este término tiene una raíz griega que posteriormente pasó al latín como *aequare* (igualar) y *aequation* (acción de igualar). Las **ecuaciones** son esencialmente una igualdad o igualdad de expresiones matemáticas. Las ecuaciones como método matemático se utilizaron desde la Antigüedad, en muchas civilizaciones de Asia y Medio Oriente. Alcanzaron su mayor auge entre los siglos IV y V en la India, y siete siglos después Bhaskara expone métodos de resolución de ecuaciones y otros conocimientos de su época en su obra *Shidanta Ciromani*. A partir de los siglos XII y XIII, las rutas comerciales, como “la ruta de la seda”, llevaron estos conocimientos desde diferentes lugares del mundo hacia Europa. En matemáticas utilizamos expresiones algebraicas para representar de una forma concreta una situación problemática. Supongamos que queremos representar la siguiente situación: “**la edad del abuelo es cuatro veces la edad del nieto, y la suma de estas dos edades es 90 años**”.

Como no sabemos las edades ni del abuelo ni del nieto, les asignamos las letras X e Y, a las que llamaremos variables). Así,

X = la edad del abuelo                      Y = la edad del nieto

Entonces, la primera parte de la relación que describe es: “la edad del abuelo es cuatro veces la edad del nieto”.

Expresamos esta relación como una ecuación muy simple:  $X = 4Y$ .

La otra parte, que dice que “la suma de estas dos edades es 90 años”, la expresaremos como:  $X + Y = 90$ .

Para resolver esta ecuación podemos comenzar reemplazando  $X = 4Y$  en la segunda igualdad. Así:

$$4Y + Y = 90$$

Entonces, solo queda sumar los términos semejantes:

$$4Y + Y = 90$$

$$(4Y + Y = 5Y)$$

$$5Y = 90$$

$$(90/5 = 18), \text{ entonces: } Y = 18$$

Significa que el nieto tiene 18 años. Entonces, como la edad del abuelo es cuatro veces la edad del nieto, la edad del abuelo será  $4(18) = 72$  años.

La teoría de ecuaciones tiene el propósito de permitirnos resolver situaciones específicas utilizando un conjunto de herramientas matemáticas. Aquí te presentamos un conjunto de estas herramientas para que puedas resolver este tipo de situaciones, sean estas cotidianas, de tu entorno o algunas más elaboradas.

¡Comencemos!

## “Esto es importante porque...”

En la comunidad de Paucarccoto hay un reservorio de agua. ¿Alguna vez te has puesto a pensar en la cantidad de agua que se consume cuando se abren las compuertas para regar las chacras? ¿Será posible calcularla con lo que sabes de matemáticas?

Para lograrlo necesitamos medir las dimensiones del reservorio, calcular el volumen y el régimen de entrada y salida de agua. ¿Se te ocurre alguna forma de hacer esos cálculos? ¿Será posible calcular el tiempo que demoraría en llenarse el reservorio si la lluvia es escasa o si, por el contrario, es muy abundante? Y si por algún motivo hubiera una fuga de agua, ¿sería posible calcular cuánta agua se pierde y saber de cuánto tiempo se dispone para reparar la fuga? Esta actividad nos permitirá conocer las herramientas matemáticas que necesitamos, así como algunas técnicas para realizar estas medidas. En esta unidad aprenderás algunas herramientas y técnicas de cálculo que te



permitirán realizar esta experiencia de una forma sencilla y dinámica.

Para lograrlo, comenzaremos por entender algunos conceptos útiles y necesarios sobre las ecuaciones, que serán nuestras herramientas matemáticas.

Imagen tomada de

<https://quechuaschool.org/homestay-program-in-cusco-peru/>

**Tu reto:** ¡Vas a medir el **caudal de agua** que se **consume** en promedio **diariamente en tu comunidad!** Esto es algo que suelen hacer quienes se dedican

a la gestión del agua.

## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Para comenzar, vas a recurrir a las cosas que ya sabes. Como verás, hay mucha información y experiencias que has vivido que pueden ser útiles para lo que vas a aprender.

### Actividad 1: Lo que sabemos...

Tener acceso a agua a lo largo de todo el año es importante por muchas razones. En la imagen de la derecha puedes ver una de las utilidades que las personas hemos dado a este recurso. ¿Sabes qué están haciendo las mujeres fotografiadas? ¿De qué manera el agua es parte de los procesos de **producción textil**, agrícola y pecuaria en tu comunidad?

Conversa con personas de la generación de tus padres o de tus abuelos y pregúntales por sus impresiones acerca de cómo ha variado el acceso al agua en tu comunidad y si consideran que deberían tomarse decisiones comunales para su cuidado y almacenamiento.

Averigua quiénes y cómo deciden el uso que se dará al agua en la comunidad.



**Teñido de lana.** Imagen tomada de Municipalidad Distrital de Chinchaypujio: <https://www.facebook.com/367758549965836/posts/1699277283480616/>

## Exploramos la temática

Como ves, hay algunas cosas que sabes sobre la temática que estamos trabajando. Ahora vas a tener la oportunidad de ampliar esa información utilizando textos informativos.

Léelos con cuidado y señala o subraya las ideas más importantes. Si lo prefieres, anota al margen palabras clave que te ayuden a recordar lo que dice el texto.



### Actividad 2: Los diferentes tipos de ecuaciones

#### Texto 1

#### ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

**Ejemplo 1.** En la feria del mercado de Anta se ha comprado tres gallinas y cuatro cuyes medianos, y se ha pagado por todo 140 soles. Si dos cuyes valen lo mismo que una gallina, ¿cuánto cuesta cada gallina?

Designemos las variables:

$X$  = precio de una gallina;  $Y$  = precio de un cuy

Sabemos que:  $3X + 4Y = 140$ . Además,  $X = 2Y$

Para resolver este problema podemos proceder de muchas maneras. Una de ellas es la siguiente: reemplacemos la equivalencia en la primera ecuación así:

$$3(2Y) + 4Y = 140$$

$$6Y + 4Y = 140$$

$$10Y = 140$$

$$Y = 140/10$$

$$Y = 14 \text{ (precio del cuy)}$$

Como dos cuyes valen lo mismo que una gallina, ¡entonces cada gallina cuesta 28 soles!

**NOTA:** Como podemos ver, para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se necesitan siempre dos ecuaciones.



Este tipo de problemas con dos como puedes ver, son bastante sencillos de resolver, sin embargo, algunas situaciones de la realidad, se necesitan plantear ecuaciones con más variables.

## Texto 2

### ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES VARIABLES

Las ecuaciones con tres variables tienen la forma general siguiente:  $aX + bY + cZ = d$

Para resolver este tipo de ecuaciones se necesitan otras tres ecuaciones, las cuales nos permitirán encontrar el valor de las incógnitas o la raíz de la ecuación. Para esto se pueden emplear varios métodos o procedimientos de solución. Uno de ellos consiste en eliminar sistemáticamente una de las incógnitas, de manera que las ecuaciones con tres variables se reducen a dos variables y así se simplifican las operaciones de solución. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X + 4Y - Z = 6$$

$$2X + 5Y - 7Z = -9$$

$$3X - 2Y + Z = 2$$

Tomemos, entonces, las dos primeras ecuaciones. Podemos multiplicar convenientemente la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por  $-1$  y luego sumarlas. Esto nos permitirá eliminar la variable  $X$ . Así:

$$\begin{array}{rcl} 2 * [X + 4Y - Z = 6] & & 2X + 8Y - 2Z = 12 \\ -1 * [2X + 5Y - 7Z = -9] & & -2X - 5Y + 7Z = 9 \\ \hline & & (2X - 2X = 0) \quad 3Y + 5Z = 21 \end{array}$$

Ahora, al sumar las dos ecuaciones de forma vertical, término a término, aprovechamos que  $2x - 2x$  se anulan y solo nos quedan 2 de las 3 variables.

Procedemos de la misma forma con la primera y la tercera ecuación. Multiplicamos la primera por 3 y la tercera por  $-1$ .

$$\begin{array}{rcl} 3 * [X + 4Y - Z = 6] & & 3X + 12Y - 3Z = 18 \\ -1 * [3X - 2Y + Z = 2] & & -3X + 2Y - Z = -2 \\ \hline & & (3X - 3X = 0) \quad 14Y - 4Z = 16 \end{array}$$

$14y - 4z = 16$ , en esta expresión, todos los términos tienen mitad, por esta razón sacamos la mitad a todos y la expresión equivalente será:  $7y - 2z = 8$ .

Ahora dividimos toda la ecuación entre 2:

$$7Y - 2Z = 8$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables, formadas de simplificaciones anteriores.

$$3Y + 5Z = 21$$

$$7Y - 2Z = 8$$

Para resolver, podemos utilizar el mismo criterio de eliminación de variables. Entonces, tomamos las ecuaciones, las multiplicamos por un factor conveniente y las sumamos; así:

$$\begin{array}{rcl}
 2 * [3Y + 5Z = 20] & & 6Y + 10Z = 42 \\
 5 * [7Y - 2Z = 8] & & 35Y - 10Z = 40 \\
 \hline
 (10Z - 10Z = 0) & & 41Y = 82 \\
 & & Y = 82/41 \\
 & & Y = 2
 \end{array}$$

Remplazando en las ecuaciones anteriores, podremos encontrar los valores de las otras variables. En la ecuación  $7Y - 2Z = 8$ , reemplazando el valor  $Y = 2$ :

$$\begin{aligned}
 7(2) - 2Z &= 8 \\
 14 - 2Z &= 8 \\
 14 - 8 &= 2Z \\
 6 &= 2Z \\
 Z &= 3
 \end{aligned}$$

No debemos olvidar que al trasponer términos de un lado al otro de la ecuación, debemos cambiar el signo. Aquí llevamos 8 al otro miembro de la ecuación como  $-8$ .

Para encontrar el valor de X, podemos reemplazar el valor de Y y Z en la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
 &X + 4Y - Z = 6 \\
 \text{Reemplazando:} \quad &X + 4(2) - 3 = 6 \\
 &X + 8 - 3 = 6 \\
 &X = 6 - 5 = 1
 \end{aligned}$$

Así, las raíces de la ecuación serán:

$$\begin{aligned}
 X &= 1 \\
 Y &= 2 \\
 Z &= 3
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.** En una familia de Paucarcoto se producen canastos pequeños para venderlos en la feria de Combapata. En una casa solo trabajan en este rubro la mamá y dos de sus hijos: Chaska, la mayor, y Siwar, el menor. Cuando trabajan Chaska y su mamá, producen 46 canastos al mes. Si trabajan Siwar y su mamá, producen 38 canastos al mes. Si trabajan Chaska y Siwar, producen 34 canastos. ¿Cuántos canastos produce cada uno en un mes?

Designemos las variables:

X = Mamá

Y = Chaska

Z = Siwar

Entonces, según los datos propuestos, tendremos:

$$X + Y = 46$$

$$X + Z = 38$$

$$Y + Z = 34$$

Aquí también podemos proceder de muchas maneras: depende de nuestra creatividad. Ensayemos una forma: podemos sumar término a término dos de las ecuaciones; así:

$$X + Y + X + Z = 46 + 38$$

$$2X + Y + Z = 84$$

Pero en la tercera ecuación,  $Y + Z = 34$

Reemplacemos este valor en la última ecuación:

$$2X + Y + Z = 84$$

$$2X + 34 = 84$$

$$2X = 84 - 34$$

$$2X = 50$$

$$X = 50/2$$

$$X = 25$$

Pasamos el 34 de la izquierda a la derecha, con signo cambiado.



Esto significa que la mamá produce 25 canastos al mes. A partir de este dato, podemos encontrar los valores de Y y Z:

$$X + Y = 46$$

$$25 + Y = 46$$

$$Y = 46 - 25$$

$$Y = 21$$

Pasamos el 25 de la izquierda a la derecha, con signo cambiado



Similarmente para Z:  $Y + Z = 34$   $21 + Z = 34$

$$Z = 34 - 21 = 13$$

$$Z = 13$$

Luego, Chaska produce 21 canastos al mes, y Siwar, 13 canastos al mes.

**Ejemplo 4.** El *Tayta* Martín se ha comprado un poncho, un chullo y una buena hacha, todo por 259 soles. Si el poncho costó 8 veces más que el chullo y el hacha 30 soles menos que el poncho, ¿cuál es el precio de cada objeto?

Sean: X = Poncho

Y = Chullo

Z = Hacha

Según la situación, tenemos:  $X + Y + Z = 259$ . Además,  $X = 8Z$  e  $Y = X - 30$

Aquí también podemos proceder de varias formas. Una de ellas será la siguiente:

$$X + Y + Z = 259$$

$$X + X - 30 + Z = 259 \quad 2X + Z = 259 + 30$$

$$2X + Z = 289$$

$$2(8Z) + Z = 289$$

$$16Z + Z = 289$$

$$17Z = 289$$

$$Z = 289/17$$

$$Z = 17$$

A partir de este valor, calculamos  $X = 8Z = 8(17) = 136$

$$X = 136$$

$$Y = X - 30$$

$$Y = 136 - 30 = 106$$

$$Y = 106$$

Luego, el poncho costó 136 soles; el chullo, 17 soles; y el hacha, 106 soles.

#### AUMENTA TU REPERTORIO MATEMÁTICO

Para resolver ecuaciones con tres o más variables, uno de los métodos más utilizados es el método de matrices, que es la base de los programas computacionales para la solución de sistemas de ecuaciones de muchas variables..

¡PUEDES INVESTIGAR más si te gustan la programación o la ingeniería!



## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído algunas descripciones sobre las ecuaciones, ha llegado el momento de verificar lo que has logrado comprender. A continuación te proponemos algunos ejercicios para ello.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

Recuerda que al resolver estos ejercicios movilizas muchas de tus capacidades. Aplica lo aprendido acompañado de tu razonamiento y lógica y notarás que son bastante sencillos. ¡Verifica tus resultados en el **solucionario** cuando tengas dudas!



Resuelve el siguiente grupo de sistema de ecuaciones:

$$1 \quad \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x = 2y + 1 \end{cases} \text{ (Solución: } x = 5; y = 2 \text{)}$$

$$2 \quad \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases} \text{ (Solución: } x = -4; y = -5 \text{)}$$

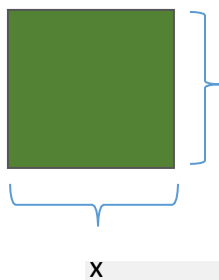
$$3 \quad \begin{cases} 7x + 9y = 42 \\ 12x + 10y = -4 \end{cases} \text{ (Solución: } x = -12; y = 14 \text{)}$$

### Texto 3

#### ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Si tenemos un terreno cuadrado de 10 000 m<sup>2</sup>, ¿cuánto miden sus lados? Este es uno de esos casos en los que se generan las denominadas **ecuaciones de segundo grado**.

Para el caso de este ejemplo, resulta bastante simple encontrar la raíz o solución; así:



Como es un cuadrado, sus lados son iguales. Si llamamos “x” a la longitud del lado, según nos dice el enunciado tendremos que:

$$X * X = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$X^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

Ahora realizamos la operación contraria a la potenciación, que es la radicación:

$$X = \sqrt{10\,000 \text{ m}^2}$$

$$X = 100 \text{ m}$$

Entonces, cada lado del cuadrado tiene 100 metros de longitud.

Este es un ejemplo sencillo, y las ecuaciones de segundo grado son similares. Así, la forma general de una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son cualquier número real. Las ecuaciones de segundo grado ( $ax^2 + bx + c = 0$ ) tienen dos soluciones (dos raíces).

La razón por la que una ecuación de segundo grado tiene dos raíces es porque la raíz cuadrada de una cantidad cualquiera tiene dos valores. Por ejemplo:

$\sqrt{9} = 3$ , porque  $(3)(3) = 9$ , pero también  $\sqrt{9}$  es  $-3$ , porque  $(-3)(-3) = 9$ .

$$\sqrt{9} = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$



Son varios los métodos para resolver este tipo de raíces. Por ejemplo, la factorización, completando cuadrados, o el método hindú, a través de la fórmula general de Bhaskara.

### 1. RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO POR FACTORIZACIÓN

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación:  $4x^2 = 7x$  expresada en la forma  $4x^2 - 7x = 0$ . Como tiene 2 términos, es un binomio.

Entonces factorizamos  $x$ , con lo que tendremos:

$$x(4x - 7) = 0$$

Luego las raíces de la ecuación serán:  $x = 0$

$$x = 7/4$$

Finalmente:

$$4x^2 - 7x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7/4 \end{cases}$$

La expresión  $x(4x - 7) = 0$  nos indica que tenemos dos factores que, multiplicados, nos dan cero. Aprovechamos esta condición matemática para igualar ambos factores a cero. Así:

$$x = 0; 4x - 7 = 0$$

Despejando de esta última,  $4x = 7$ , por lo que  $x = 7/4$ .

Es decir, las raíces de la ecuación son:  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 7/4$

**Ejemplo 2.** Proponemos ahora la ecuación:  $2x^2 + x - 6 = 0$

Como tiene 3 términos, es un trinomio.

Para resolverlo por factorización, descomponemos esta expresión en sus

factores; así:

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$(2x - 3)(x + 2) = 0$$

De donde tendremos que:

$$2x^2 + x - 6 = \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Factorizar una expresión algebraica es una técnica matemática que consiste en buscar sus factores equivalentes; por ejemplo:

$$2x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{Aquí: } 2x \cdot x = 2x^2 \text{ y } -3 \cdot 2 = -6$$

$$\text{Además, } 2x \cdot 2 = 4x$$

$$-3 \cdot x = -3x$$

Sumando estas cantidades  $(4x - 3x)$ , resulta  $x$ .

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2x & -3 \\ x & 2 \end{array}$$

**Ejemplo 3.**

$$6x^2 + 17x + 12 = 0$$

Comencemos descomponiendo sus factores:



$$6x^2 + 17x + 12 = 0$$

$$(2x + 3)(3x + 4) = 0$$

$$6x^2 + 17x + 12 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2x & 3 \\ 3x & 4 \end{array}$$

$$(3x)3 = 9x$$

$$(2x)4 = 8x$$

---


$$17x$$

Luego, tendremos:

$$6x^2 + 17x + 12 = \begin{cases} x_1 = -3/2 \\ x_2 = -4/3 \end{cases}$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3/2$$

$$3x + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -4/3$$

## 2. POR FÓRMULA GENERAL

En este método, lo único que necesitamos es recordar la fórmula e identificar los términos. Dada la ecuación:  $ax^2 + bx + c = 0$ , la solución general está dada por las siguientes raíces.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Ejemplo 3.** Resolvamos por este método la ecuación inmediatamente anterior:

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

Identifiquemos los términos: **a = 2; b = 1; c = -6**. Ahora, reemplacemos estos valores en la fórmula general:

$$X_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \frac{6}{4} = 3/2$$

$$X_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Las raíces son, entonces:

$$6x^2 + 17x + 12 = \begin{cases} x_1 = -3/2 \\ x_2 = -4/3 \end{cases}$$

### AUMENTA TUS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

Puedes investigar los métodos adicionales para resolver ecuaciones de segundo grado, como completar al cuadrado.



## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído algunas descripciones sobre las **ecuaciones de segundo grado**, ha llegado el momento de verificar lo que has comprendido. Con ese fin, a continuación te proponemos algunos ejercicios.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1  $x^2 + 11x + 24 = 0$  (Solución:  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = -8$ )

2  $x^2 - 13x = -36$  (Solución:  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 9$ )

3  $x^2 + 6x + 16 = 16$  (Solución:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 6$ )

#### Texto 4

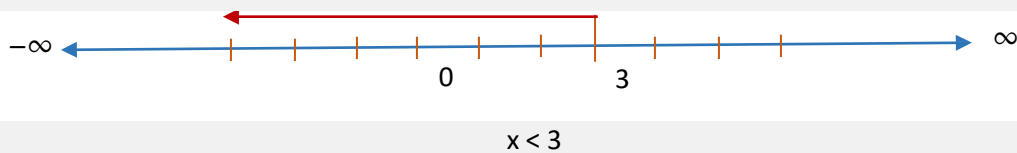
### INECUACIONES

¿Recuerdas qué son las ecuaciones? Se trata esencialmente de igualar expresiones algebraicas. Contrariamente, una **inecuación** es más bien una “desigualdad”, de manera que la raíz (o el valor de la variable) no es un número específico, sino uno que puede representar un cierto conjunto de valores.

Hagámoslo más simple: si ya sabes resolver ecuaciones, entonces ya sabes resolver inecuaciones. Solo necesitas dos cosas: primero, poner en práctica tu lógica, y, segundo, recordar un poco sobre la recta numérica y las desigualdades. Entonces, como ya tienes lo primero, vayamos por lo segundo.

¿Qué significa que  $x$  sea menor que tres? (“ $x < 3$ ”). Significa que  $x$  puede ser 2; 1; 0;  $-1$ ... y cualquier otro número que aparezca a la izquierda de 3 en la recta numérica de los números reales.

Recuerda que podemos representar la recta numérica de los números reales como:



Con este criterio, vamos a resolver algunas inecuaciones. Ya verás que son bastante sencillas.

#### Ejemplo 1. Resolver: $x - 5 \geq 4x - 1$

Entonces, resolvemos como cualquier ecuación, pero respetando el sentido de la desigualdad.

$$x - 5 \geq 4x - 1$$

Trasponiendo términos, tendremos:  $-5 + 1 \geq 4x - x$

$$-4 \geq 3x$$

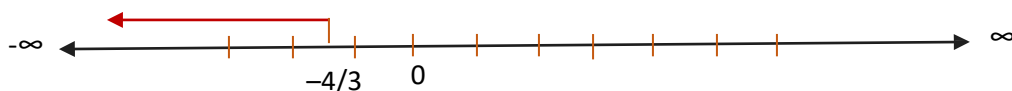
Despejando  $x$ , tendremos:  $x \leq -4/3$  ( $-4/3 = -1,33333$ )

Entonces, todos los números que verifican la ecuación, o el conjunto solución, serán:

$$CS = \{x / x \in \mathbb{R}, x \leq -4/3\}$$

También podemos representar este conjunto solución como un intervalo, así:  $x \in ]-\infty, -4/3]$

Y, gráficamente:



#### Ejemplo 2. Resolver: $77 + 13x \geq 9 - 4x$

Entonces:  $13x + 4x \geq 9 - 77$

$$17x \geq -68$$

$$x \geq -68/17$$

$$x \geq -4$$

$$\text{Luego: } CS = [-4, \infty[$$

**Ejemplo 3.** Resolver:  $-3x - 5 < 3 - 4x \leq -9$

Como esta ecuación tiene dos partes, debemos resolver cada una.

Primera parte:  $3x - 5 < 3 - 4x$

$$\begin{aligned}\text{Despejando: } -3x + 4x &< 3 + 5 \\ x &< 8\end{aligned}$$

Segunda parte:  $3 - 4x \leq -9$

$$\begin{aligned}\text{Despejando: } -4x &\leq -9 - 3 \\ -4x &\leq -12 \\ 4x &\geq 12/4 \\ x &\geq 3\end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución será:  $CS = \{x / x \in \mathbb{R}, x < 8 \text{ y } x \geq 3\}$

En intervalos,  $x \in [3, 8[$



**¡Ojo!** aquí vamos a cambiar los signos en ambos lados de la inecuación y también el sentido de la desigualdad.  
De aquí  $-4x \leq -12$  a esto:  $4x \geq 12$

## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído algunas descripciones sobre las inecuaciones, ha llegado el momento de verificar lo que has logrado comprender. Te proponemos a continuación algunos ejercicios.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

Resolver las siguientes inecuaciones:

1  $x - 5 < 2x - 6$  (Solución:  $x > 1$ )

2  $3x - 14 < 7x - 2$  (Solución:  $x > -3$ )

3  $3x - 4 + x/4 < 5x/2 + 2$  (Solución:  $x < 8$ )

## ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces nueva información, es momento de ver de qué manera podrías utilizarla para explicar lo que sucede en tu localidad o en tu experiencia.

Recuerda que puedes revisar, cada vez que sea necesario, los textos que has leído previamente. ¡Y a veces vale la pena realizar los ejercicios con ayuda de algún compañero o compañera!



### EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Empecemos por resolver algunos retos para verificar lo que hemos comprendido.

- Un **reservorio para agua en Parccotica** presenta internamente las siguientes medidas: largo = 4 m; ancho = 2 m; altura = 1,5 m.
  - ¿Cuál es la capacidad del reservorio en litros? Recuerda que el volumen se calcula en  $m^3$ , como el producto de los lados por la altura (en este caso, la profundidad del reservorio). Ten en cuenta que  $1 m^3$  equivale a 1000 litros.
  - Si el nivel del agua está a 85 centímetros de la base del reservorio, ¿cuál es la cantidad de agua en  $m^3$  y en litros?
- ¿En cuánto tiempo se vaciaría totalmente este reservorio si el agua se evacúa por la llave a razón

de 21 litros por minuto? (Recuerda revisar primero tu cálculo del volumen de agua y ten en cuenta que  $1 \text{ m}^3$  equivale a 1000 litros.)

3. Si se abre una llave de ese mismo reservorio de agua y se vacía en 4 horas; si cada hora se desocupa  $\frac{3}{4}$  de lo que había; si al cabo de las 4 horas se cierra la llave y se encuentra que el reservorio tiene aún 3600 litros de agua, ¿cuántos litros de agua tenía inicialmente el reservorio?
4. El papá de Rocío recorre 64 km desde Cusco hasta Paucarccoto:  $\frac{1}{6}$  del camino lo hace a pie,  $\frac{1}{3}$  en combi,  $\frac{1}{4}$  en auto y finalmente completa el resto del tramo a pie. ¿Qué parte de todo el recorrido lo hizo a pie? (Recuerda colocar tu respuesta en km.)
5. Cuando le preguntan al *tayta* Rosendo la edad de su hijo, él responde así: “ahora tengo tres veces su edad, pero hace 10 años tenía cinco veces su edad”. ¿Puedes calcular la edad de Rosendo?
6. Edelmira y su mamá están preparando un pedido de artesanías. Edelmira puede hacer todo el trabajo en 12 días y su mamá en 8 días. Alternándose el trabajo un día cada una, entregan el pedido en 11 días. ¿Cuántos días trabajó cada una?
7. Un comerciante compra cierto número de calabazas (*lacawiti*) a 5 calabazas por 6 soles. Si se queda con  $\frac{1}{3}$  de lo que compró y luego vende la otra parte a 4 calabazas por 9 soles y gana 9 soles, ¿cuántas calabazas compró?
8. Florencio tiene un terreno rectangular. Uno de los lados mide el triple que el otro. Si cada metro cuadrado produce 2 kilos de quinua y este año se han cosechado 600 kilos de quinua, ¿cuánto mide cada lado de la chacra?
9. En un terreno rectangular, el largo excede al ancho en 8 m. Si aumentáramos 3 m a cada lado, el área aumentaría en  $57 \text{ m}^2$ . ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

#### ACTIVIDAD FINAL

En el **reservorio de la comunidad**, realiza las siguientes actividades:

1. Mide los lados del reservorio para calcular el volumen interno.
2. Calcula la cantidad de agua que almacena.
3. Mide el **caudal de agua que ingresa** y el caudal de agua que sale.
4. Calcula en cuánto tiempo se vaciaría el reservorio si no ingresara agua.
5. ¿Qué le sugerirías a tu comunidad a partir de lo que has descubierto?

Para medir el caudal de agua necesitas un recipiente graduado (un balde) y un cronómetro (tienes uno en tu celular). A la salida del reservorio, en la llave, puedes medir el tiempo en que se llena el balde, y así obtendrás el caudal de agua en litros por segundo, que puedes convertir en litros por minuto. Por ejemplo, si el balde de 12 litros se llena en 18 segundos, el caudal será:  $12 \text{ litros} / 18 \text{ segundos} = 40$

litros/minuto  $\left[ \frac{12 \text{ l}}{18 \text{ s}} = \frac{2 \text{ l}}{3 \text{ s}} * \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 40 \text{ l/min.} \right]$



## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:

**Lo aprendido:** ¿Qué sé ahora que no sabía antes? ¿Qué cosas necesito explorar más y qué dudas me quedan? ¿Cómo se relaciona esto con mi vida cotidiana?





Observa esta fotografía de los estudios de la municipalidad de Chinchaypujio (2017) para mejorar los servicios de agua y saneamiento. ¿Se necesitan conocimientos matemáticos al realizar este tipo de trabajo? ¿Cuáles de los que has visto en esta experiencia crees que podrían utilizarse para calcular la capacidad de los reservorios de agua para las comunidades?

**El proceso:** ¿Fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Qué recursos utilicé para aprender y a quiénes recurrí para aprender más? ¿A qué compañeros o compañeras puedo acudir cuando tengo dificultades en comprender conceptos de matemáticas?

## SOLUCIONARIO

1. Un reservorio para agua en Parccotica presenta internamente las siguientes medidas:

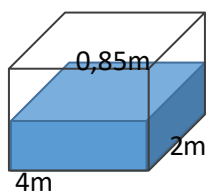
largo = 4 m; ancho = 2 m; altura = 1,5 m

- a) ¿Cuál es la capacidad del reservorio en litros? Recuerda que el volumen se calcula en  $m^3$ , como el producto de los lados por la altura (en este caso, la profundidad del reservorio). Ten en cuenta que 1  $m^3$  equivale a 1000 litros.

### Solución:

Como sabemos, el volumen total será:  $V = a \cdot b \cdot h$

De acuerdo con las medidas del reservorio, tenemos:  $a = 4 \text{ m}$ ;  $b = 2 \text{ m}$ ;  $h = 1,5 \text{ m}$



Reemplazando los valores:

$$V = 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = 12 \text{ m}^3 \text{ (capacidad del reservorio).}$$

También la podemos expresar en litros: como un  $m^3$  equivale a 1000 litros, entonces la capacidad del reservorio será 12 000 litros de agua.

- b) Para calcular el volumen de agua a 85 centímetros (o, equivalentemente, a 0,85 m), solo tenemos que multiplicar la altura por el área del reservorio, que es constante:

$$X = (a \cdot b) \cdot 0,85$$

$$X = (4 \cdot 2) \cdot 0,85 = 6,8 \text{ m}^3, \text{ que equivalen a 6800 litros.}$$

2. ¿En cuánto tiempo se vaciaría totalmente este reservorio si el agua se evacúa por la llave a razón de 21 litros por minuto?

### Solución:

Si salen 21 litros de agua por minuto, en una hora (60 minutos) saldrán  $21 \text{ l} \cdot 60 = 1260$  litros de agua. Como sabemos, la capacidad del reservorio es de 12 000 litros. Llamemos "x" al tiempo que tarda en vaciarse:

$$x = 12000 / 1260 = 9,52 \text{ horas (ya que necesitamos saber cuántas horas hay en 12000).}$$

Entonces, si el reservorio está lleno se vaciaría en 9,52 horas (9 horas y 31 minutos, aproximadamente).

**RETO ADICIONAL:** Si el reservorio tuviera dos llaves de diferente sección, de manera que por una salga el agua a razón de 21 litros por minuto y por la otra a 27 litros por minuto, ¿en cuánto tiempo se vaciaría el reservorio si se abren simultáneamente estas dos llaves? Respuesta: en 4,17 horas (4 horas y 10 minutos).

3. Si se abre una llave de ese mismo reservorio de agua y se vacía en 4 horas; si cada hora se desocupa  $\frac{3}{4}$  de lo que había; si al cabo de las 4 horas se cierra la llave y se encuentra que el reservorio tiene aún 3600 litros de agua, ¿cuántos litros de agua tenía inicialmente el reservorio?

**Solución:**

Al final el volumen es  $W = 3600$  litros;  $W = \frac{3}{4} * Z$  (los  $\frac{3}{4}$  del volumen anterior)

A la tercera hora el volumen es  $Z = \frac{3}{4} * Y$ ; entonces:  $Y = \frac{4}{3} * Z$

A la segunda hora el volumen es  $Y = \frac{3}{4} * X$ ; entonces:  $X = \frac{4}{3} * Y$

En la primera hora el volumen inicial de agua será  $X$

Ahora calculamos estos valores:  $Z = \frac{4}{3} * W = \frac{4}{3} * 3600 = 4800$

Entonces:  $Y = \frac{4}{3} * Z = \frac{4}{3} * 4800 = 6400$

Entonces:  $X = \frac{4}{3} * Y = \frac{4}{3} * 6400 = 8533,3$

Luego, el volumen inicial de agua era de 8533,3 litros.

4. El papá de Rocío recorre 64 km desde Cusco hasta Paucarcoto:  $\frac{1}{6}$  del camino lo hace a pie,  $\frac{1}{3}$  en combi,  $\frac{1}{4}$  en auto y finalmente completa el resto del tramo a pie. ¿Qué parte de todo el recorrido lo hizo a pie?

**Solución**

Sumando los tramos tendremos.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + x = 1$$

(Todo el tramo es 1, el 100 %, porque estamos tomando las fracciones respecto del total.)

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + x = 1$$

$$\frac{3}{4} + x = 1$$

$$\text{Entonces: } x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Luego, hizo a pie:  $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ .

Caminó los  $\frac{5}{12}$  del tramo de 64 km. ¿Te animas a calcular el resultado de ese enunciado?

5. Cuando le preguntan al *tayta* Rosendo la edad de su hijo, él responde: “ahora tengo tres veces su edad, pero hace 10 años tenía cinco veces su edad”. ¿Qué edad tiene su hijo?

### Solución

Este es un problema típico que se puede resolver de la siguiente manera.

Llamemos **X** a la edad del *tayta*, y **Y** a la edad de su hijo.

Entonces, según el enunciado, tendremos:

En la actualidad sus edades son:  $x = 3y$

Y hace 10 años eran:  $(x - 10) = 5(y - 10)$ .

Resolviendo estas ecuaciones, tendremos:

$$X - 10 = 5y - 50$$

$$X = 5y - 40$$

Reemplazando  $x = 3y$ , tendremos:  $3y = 5y - 40$

Despejando:  $2Y = 40$ ,  $Y = 20$ . El hijo tiene 20 años.

6. Edelmira y su mamá preparan un pedido de artesanías. Edelmira puede hacer todo el trabajo en 12 días y su mamá en 8 días. Si trabaja una cada día y entregan el pedido en 11 días, ¿cuántos días trabajó cada una?

### Solución

Como en cualquier problema, se puede aplicar la lógica y utilizar varios caminos de solución. Aquí utilizaremos ecuaciones.

Sea:  $x$  = número de días que trabaja Edelmira

$Y$  = número de días que trabaja su mamá

Sabemos que  $x + y = 11$

Además de las condiciones del problema, podemos estimar que si todo el trabajo lo consideramos como 1 (todo el pedido), entonces cada una hizo una parte (una fracción). Expresamos matemáticamente esta condición como:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \quad (\text{porque Edelmira hace el trabajo en 12 días y su mamá en 8 días})$$

Ahora, efectuando operaciones, tendremos esta última expresión:

$$2x + 3y = 24$$

Entonces, tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$2x + 3y = 24$$

$$x + y = 11$$

} Podemos resolverlo, por ejemplo, eliminando una de las variables.

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 3y & = & 24 & \dots\dots\dots & 2x + 3y = 24 \\ -2*(x + y) & = & 11 & \dots\dots\dots & -2x - 2y = -22 \\ \hline \end{array}$$

Sumando, tendremos:

$$y = 2$$

Reemplazando este valor de  $y = 2$  en cualquiera de las ecuaciones anteriores  $\{x + 2 = 11\}$ , encontraremos que  $x = 9$ . Entonces, Edelmira trabajó 9 días, y su mamá, 2 días.

$$\begin{aligned} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} &= (8x + 12y) / 96 = 1 \\ 8x + 12y &= 96; \text{ también: } 4x + 6y = 48 \\ \text{Finalmente, } 2x + 3y &= 24 \end{aligned}$$

7. Un comerciante compra cierto número de calabazas (lacawiti). Le venden 5 calabazas por 6 soles. Si se queda con  $\frac{1}{3}$  de lo que compró, luego vende la otra parte a 4 calabazas por 9 soles y obtiene como ganancia 9 soles. ¿Cuántas calabazas compró?

### Solución

Consideremos:

$x$  = número total de calabazas

$y$  = precio total de la compra

Entonces:

El total de calabazas cuesta:  $\frac{x}{5} * 6 = y$  { 5 calabazas por 6 soles}. Simplificando:  $6x = 5y$

Por otro lado, si se queda con  $\frac{1}{3}$  de las calabazas, le quedan  $\frac{2}{3}$  para vender.

Entonces, podemos expresar así el enunciado del problema:

Queda para venta  $\frac{2}{3} * x$ ,

y como vende 4 calabazas por 9 soles,

el precio será:  $\frac{[\frac{2x}{3}]}{4} * 9$

Además, con esta venta gana 9 soles, es decir:

$\frac{[\frac{2x}{3}]}{4} * 9 = y + 9$ . Ahora, realizando las operaciones indicadas,

podemos reducir esta expresión a:  $3x = 2y + 18$

Entonces, tenemos dos ecuaciones:

$$6x = 5y$$

$$3x = 2y + 18$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, tendremos:

$$\begin{array}{rcl} * -2(6x = 5y) & \dots\dots\dots & -12x = -10y \\ 5*(3x = 2y + 18) & \dots\dots\dots & 15x = 10y + 90 \end{array}$$

---


$$\text{Sumando:} \qquad \qquad \qquad 3x = 90$$

Entonces, el comerciante compró inicialmente 30 calabazas.

(Cuántos 5 hay en  $x$  es la unidad)  
Y esto vale 6 soles)  
**Unidad por costo = precio**

$$\begin{aligned} \frac{[\frac{2x}{3}]}{4} * 9 &= y + 9 \\ \frac{2x}{3} * 9 &= 4y + 36 \\ 6x &= 4y + 36 \\ 3x &= 2y + 18 \end{aligned}$$

8. Florencio tiene un terreno rectangular. Uno de los lados mide el triple que el otro. Si cada metro cuadrado produce 2 kilos de quinua y este año se han cosechado 600 kilos de quinua, ¿cuánto mide cada lado de la chacra? (Respuesta: el ancho mide 10 metros).
9. En un terreno rectangular, el largo excede al ancho en 8 m. Si aumentáramos 3 m a cada lado, el área aumentaría en  $57 \text{ m}^2$ . ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? (Respuesta: ancho = 8 m; largo = 16).

## Unidad de Aprendizaje N.º 2

### ¡Súbele el volumen!

| Área       | Duración                                               |
|------------|--------------------------------------------------------|
| Matemática | 4 semanas: del 7 de setiembre al 2 de octubre del 2020 |

### ¿Qué vamos a aprender?

Estimada y estimado estudiante:

Esta unidad de aprendizaje te permitirá desarrollar las competencias y capacidades que aparecen en la siguiente tabla. Revisa los desempeños, pues son conductas verificables que debes poder realizar al terminar esta experiencia.



**Ejes:** Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos / Soberanía alimentaria y productiva.

| COMPETENCIAS                                                                                                                        | CAPACIDADES                                                             | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de cantidad.                                                                                                     | Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.               | Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos de cálculo y estimación para resolver problemas, los evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. |
| Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.                                                                             | Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio. | Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas.                                                                |
| <b>VOLÚMENES.</b> Volúmenes regulares (cubo, cilindro). Área lateral y área total. Volumen del cono y tronco. Volumen de la esfera. |                                                                         |                                                                                                                                                                                                                          |

### “Esto es importante porque...”

A menudo escuchamos decir la palabra **volumen** en varios contextos. Algunos dicen “aumenta el volumen de la radio”; otros, que una obra fue escrita en “varios volúmenes”; y otros más, el “volumen de los productos importados”. En matemática tenemos un concepto geométrico del volumen, y se refiere al espacio que ocupa un objeto en tres dimensiones. Como todos los cuerpos ocupan un espacio, medir esta cantidad de espacio es medir el volumen de este cuerpo.

Es bastante sencillo medir el volumen de las **figuras geométricas regulares**. Recuerda cómo calculamos el volumen del reservorio en la Unidad de Aprendizaje anterior: solo tuvimos que medir sus tres lados, luego multiplicamos estas cifras y así obtuvimos su volumen.

Volumen = (largo)\*(ancho)\*(altura); y la unidad se expresa en metros cúbicos ( $m^3$ ).

Ahora, si el reservorio tuviera estos tres lados iguales, calcular su volumen sería aún más sencillo. Por ejemplo, si uno de los lados mide 2 metros, entonces el volumen sería:  $(2m)*(2m)*(2m) = 8 m^3$ . Este

reservorio tendría la forma de un cubo. ¿Pero qué sucede cuando nos encontramos con reservorios cuyos lados **no son todos iguales**?

Observa las imágenes de los reservorios de Mollepata y de la cuenca del río Huatanay. ¿Cómo podrías calcular su capacidad o la cantidad de agua que pueden contener? ¿Serán cálculos similares los que se hacen cuando se trata de un reservorio con formas rectas que cuando sus bordes son curvos? ¿Se te ocurre alguna forma de hacerlo “sin recurrir a las matemáticas”?

Por otro lado, seguramente has notado que en el tanque de agua potable de la derecha hay una ‘regla’ externa que muestra la cantidad de agua que contiene... ¿Sabes cómo se hizo para calcular esa cantidad? ¿Te gustaría saberlo?



*Reservorio de agua potable en la margen derecha del Huatanay.*  
Imagen tomada de Sicuani Noticias.



*Reservorio de Huamanpata (Mollepata, Cusco).* Imagen tomada de MINAGRI.

**Tu reto:** Utilizando algunas herramientas matemáticas debes poder **calcular el volumen de un cuerpo regular y también el de uno irregular**, tales como los **cilindros de agua o los reservorios comunales**. ¡Vas a hacer lo que hacen las ingenieras e ingenieros que trabajan en instituciones como el Ministerio de Agricultura, Seda Cusco o la Autoridad Nacional del Agua!

## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Para comenzar, vas a recurrir a las cosas que ya sabes. Como verás, hay mucha información y experiencias que has vivido que pueden ser útiles para lo que vas a aprender.

### Actividad 1: Lo que sabemos...

Seguramente hay varios conceptos matemáticos que usas de manera cotidiana, ¡y algunos que ya has estudiado como parte de tu experiencia escolar!

Si tuvieras que **explicar** con palabras sencillas y empleando tu **vocabulario usual** los siguientes términos, ¿cómo lo harías? Si tuvieras que ayudarte con **dibujos o gráficos simples**, ¿qué harías?

**Cubo**  
**Diámetro**

**Cilindro**  
**Altura**

**Cono**  
**Radio de un círculo**

**Esfera**  
**Metro cúbico**

## Exploramos la temática



Como ves, hay algunas cosas que sabes sobre la temática que estamos trabajando. Ahora vas a tener la oportunidad de ampliar esa información utilizando textos informativos.

**Léelos** con cuidado y **señala o subraya** las ideas más importantes. Si lo prefieres, anota al margen palabras clave que te ayuden a recordar lo que dice el texto.

¡Y si hay algo que sientes que es muy complicado, una buena alternativa es **recurrir a una compañera o un compañero**! ¡Ellos hablan “el mismo lenguaje” que tú... y a veces les entendemos mejor porque usan términos sencillos y de la vida cotidiana!

### Actividad 2: ¡Empecemos por las esferas!

#### Texto 1

#### EL VOLUMEN DE LAS ESFERAS Y EL FÚTBOL

¿Sabías que no todas las pelotas de fútbol son iguales? Por ejemplo, una **pelota oficial** debe cumplir con unas características específicas. ¡No puede ser de cualquier tamaño! Ahora vas a poder calcular su volumen. Para esto, primero consigues una pelota de fútbol y una cinta métrica (o un alambre o una pita inextensible). Lo que necesitamos es medir el **diámetro** de la pelota para, con este dato, calcular su volumen. Para esto pon atención a los siguientes conceptos matemáticos.

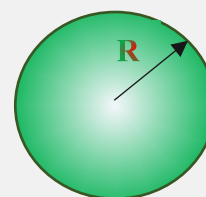
Recuerda que la fórmula del **volumen** de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Donde:

R = radio de la esfera

$\pi = 3,1416$



Para medir el radio de la esfera, **R**, vamos a aprovechar una propiedad: como el **radio de la esfera** es el mismo radio del círculo que forma su parte más amplia, entonces, si medimos la circunferencia de la esfera lo más precisamente posible, tendremos el radio R.

Procedemos así:

Si tenemos una cinta métrica, medimos directamente la longitud de la esfera pasando la cinta por el ecuador de la esfera (el diámetro más extenso). Después registramos la medida **L**. Si solo tenemos una cuerda, hacemos lo mismo.

Luego extendemos la cuerda y la medimos con nuestra regla escolar o con un metro.

Entonces, como la **longitud de la circunferencia** es:  **$L = 2 \pi R$** ,

para encontrar **R** la despejamos de la anterior relación:

$$R = \frac{L}{2\pi}$$

**Por ejemplo:** si hemos medido una longitud **L** de 72 cm, para calcular el radio reemplazamos los valores, así:

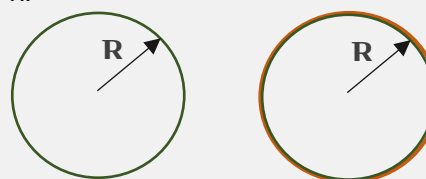
$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{72}{2 \cdot (3,1416)} = \frac{72}{6,2831} = 11,459 \text{ cm}$$

Ahora que tenemos el valor del radio, podemos, reemplazando los valores, calcular el volumen del balón de fútbol.

Por ejemplo, para el radio **R = 11,459cm**, el volumen será:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} (3,1416) \cdot (11,459)^3 = \frac{4}{3} 4727,048 = 6302,73 \text{ cm}^3$$

6302,73 centímetros cúbicos es el volumen de esta esfera.



Si quieres o necesitas calcular el área de una esfera, solo requieres conocer el valor de su radio y, luego, aplicar la siguiente formula:  $A = 4 \pi R^2$



## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído sobre el volumen de la esfera, ha llegado el momento de verificar lo que pudiste comprender. A continuación se proponen algunos ejercicios para ello.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

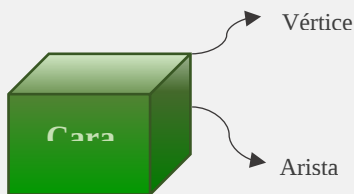
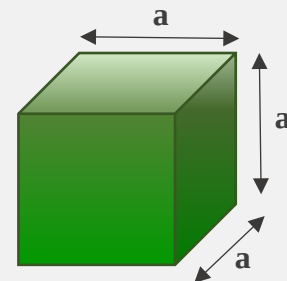
1. Calcula el volumen de una esfera de 10 cm de radio.
2. ¿Cuál es el valor del radio de un balón que tiene 1809,56 centímetros cuadrados de superficie? (Respuesta: 12cm)
3. Dos esferas metálicas de 3 cm y 2 cm de radio respectivamente se funden juntas, ¿Cuál será el radio de la nueva esfera? (Respuesta: 3,27cm)

## Texto 2

### LOS CUBOS Y LA CAPACIDAD DE CARGA DE LOS CAMIONES

El cubo está formado por seis caras que tienen exactamente las mismas dimensiones; por eso también se le llama hexaedro regular. Un cubo es una forma geométrica regular cuyos lados son iguales y ortogonales, es decir, sus lados (a) están posicionados a 90 grados (son ángulos rectos).

En el esquema de la derecha podemos reconocer algunos de los elementos del cubo:



Para calcular el volumen del cubo solo necesitamos conocer el valor de la arista. Por ejemplo, si esta mide 30 cm, entonces:  
 $V = a^3 = a \cdot a \cdot a = (30 \text{ cm})^3 = 27\,000 \text{ cm}^3$

**NOTA:** Existen figuras parecidas al cubo que no tienen sus aristas iguales y a las que se llama, en general, “paralelepípedos”. Si sus lados forman un ángulo recto (90 grados), entonces se llaman ortoedro o prisma. Este último además tomará el nombre de la forma de la base: si es un triángulo, será un prisma triangular; si es un pentágono, se llamará pentagonal; si es un hexágono, hexagonal, etcétera.

**Por ejemplo:** un metro cúbico de arena es un volumen que ocupa un cubo de un metro de arista. ¿Cuántos cubos puede traer un volquete Fuso si su carrocería para carga tiene las siguientes dimensiones: largo, 2,8 m; ancho, 1,40 m; y altura de la tolva, 0,6 m?

### Solución

Como el volumen es:

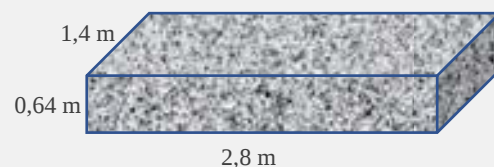
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Aquí:  $a = 2,8 \text{ m}$ ;  $b = 1,4 \text{ m}$ ;  $c = 0,64 \text{ m}$

Reemplazando, tendremos:

$$V = 2,8 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m} \cdot 0,64 \text{ m} = 2,508 \text{ m}^3.$$

Entonces, este volquete puede llevar aproximadamente 2,5 metros cúbicos de arena.



Si requieres calcular el área de un cubo, solo necesitas conocer el valor de su arista. Luego aplicas la siguiente formula:  $A = 6a^2$ , es decir, sumamos las 6 caras que tiene el cubo.



## EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- 1 Un volquete tiene una tolva de 3,2 m; 1,60 m de ancho; y 0,9m de altura. ¿Cuánto material puede llevar? (Respuesta: 4,608m<sup>3</sup>)
- 2 Si un aula mide 6 m de largo, 4 m de ancho y 2,4 m de altura, ¿cuántos metros cuadrados de aire hay dentro de esa aula? (Respuesta: 57,6 m<sup>3</sup>)
- 3 ¿Te animas a usar la información de los textos 1 y 2 a la vez? Una caja cúbica de cartón tiene un volumen de 64cm<sup>3</sup>. Dentro viene un balón que toca exactamente la caja en sus 6 caras. ¿Cuál es el volumen del balón? (Respuesta: 33,51cm<sup>3</sup>) (¿Un truco? ¡Necesitas conocer el radio del balón!)

Ahora que ya sabes cómo se calculan los volúmenes de esferas, cubos y prismas, vamos por unas figuras geométricas un poco diferentes: ¡conos y cilindros!

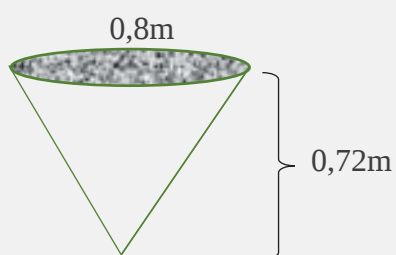
### Texto 3

#### CONOS: ¡COMO LOS DE LOS DEPÓSITOS Y TOLVAS!

Un cono es una figura geométrica de revolución. Tiene una base circular y una superficie lateral que termina en un vértice. El volumen de un sólido de forma cónica, o de un cono en general, se calcula utilizando la siguiente relación:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

**Por ejemplo:** ¿cuánto material puede transportar el volumen de una tolva cónica que tiene 0,8 m de diámetro y una altura de 0,72 m?



En este caso:  $h = 0,72 \text{ m}$

$R = ?$

(El radio será la mitad del diámetro de la tolva, es decir:  $R = 0,8/2 = 0,4\text{m}$ )

Con estos valores, reemplazamos en la fórmula:

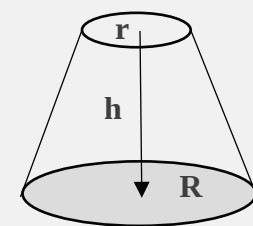
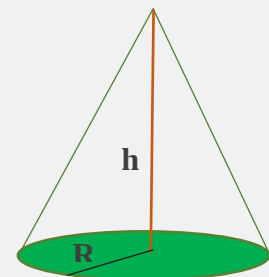
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} (3,1416 (0,4)^2 \cdot 0,72 = 0,1206 \text{ m}^3$$

Entonces, esta tolva puede transportar un volumen de 0,12 m<sup>3</sup> de material, aproximadamente.

En la práctica, las **tolvas cónicas** que usan las grúas o los silos para almacenar granos son propiamente un tronco cónico, como se ve en el esquema.

Para calcular el volumen se utiliza una relación similar agregando el radio  $r$  del círculo menor; así:

$$V = \frac{h}{3} \pi (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$



**Por ejemplo:** si en la tolva anterior la boca de salida tiene un diámetro de 14 cm y una altura de 0,62 cm, ¿qué volumen de materia podrá transportar?

Entonces, en este caso tendremos las siguientes dimensiones:

$$h = 0,72 \text{ m}$$

$$R = 0,4 \text{ m}$$

$$r = 0,07 \text{ m} \quad (r = 0,14 \text{ cm} / 2 = 0,7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m})$$

Reemplazando estos valores, tendremos:

$$V = \frac{h}{3} \pi (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{0,72}{3} 3,1416 * [(0,4)^2 + (0,07)^2 + 0,4 * 0,07] = 0,545 * [0,1929]$$

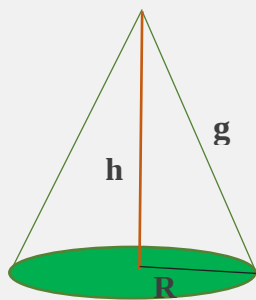
$$V = 0,105 \text{ m}^3 \text{ de volumen de material.}$$

**NOTA:** Si necesitas aplicar diferentes tipos de volumen, puedes investigar en cualquier libro de geometría o en internet. Como ves, manejar las fórmulas matemáticas es bastante simple y práctico.

Si requieres calcular el área de un cono, a continuación te indico cómo hacerlo.



El área total de un cono se calcula sumando el área de la base del cono y lo que se conoce como “área lateral”. Hallar el **área de la base** es hallar el área de este círculo, para lo que necesitamos el valor de su radio; entonces:  $A_b = \pi R^2$



De otro lado, para hallar el **área lateral** necesitamos otro elemento del cono que se llama “generatriz” (**g**); y para calcular la generatriz aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por la altura, el radio y la generatriz que aparece en cualquier cono, como en el esquema.

$$\text{Entonces: } g^2 = R^2 + h^2; \text{ o también: } g = \sqrt{R^2 + h^2}$$

$$A_L = \pi R g$$

Con esto, el **área total** del cono será:

$$A_T = A_b + A_L = \pi R^2 + \pi R g$$

#### Texto 4

#### LOS DEPÓSITOS DE LUBRICANTES: ¡SON CILINDROS!

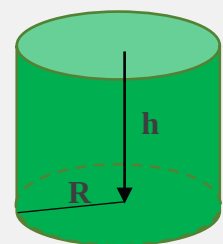
El cilindro es otra figura geométrica de revolución. (Se llaman así porque una revolución es un giro completo de un objeto. En este caso, imagina el borde externo del cilindro como una línea que ha girado hasta volver a su posición inicial.) Calcular el volumen de un cilindro es bastante sencillo: solo tenemos que multiplicar el área de la base por la altura, y listo. Esto es:

$$V = A \cdot h$$

Donde **A** = área de la base del cilindro

$A = \pi \cdot R^2$ , donde R es el radio de la base del cilindro.

Entonces, el volumen lo podemos calcular como:  $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$



**Por ejemplo:** podemos encontrar el volumen de un cilindro de lubricantes que utilizamos para muchos propósitos, como almacenar o transportar combustible. Un cilindro estándar metálico tiene las siguientes dimensiones internas: diámetro, 57cm; altura, 85 cm. Encontremos cuántos litros de agua pueden entrar en este cilindro.

Tenemos:

$$h = 85 \text{ cm} = 0,85 \text{ m (convirtiendo en metros)}$$

$$R = (\text{diámetro}) / 2 = \frac{57}{2} = 28,5 \text{ cm} = 0,285 \text{ metros (el radio es la mitad del diámetro)}$$

Luego, reemplazamos en la relación:

$$V = \pi * R^2 * h = (3,1416) * (0,285)^2 * 0,85 = 0,2169 \text{ m}^3$$

Entonces, a partir de este volumen calculamos cuántos litros entran en este cilindro.

Recuerda: en un metro cúbico hay mil litros de agua. Por ejemplo, un reservorio de 250 litros tiene  $\frac{1}{4}$  de metro cúbico, es decir,  $0,25\text{m}^3$ .



Entonces, si  **$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ litros}$** , hacemos una simple proporción [en la que sea X la cantidad de litros]; entonces, la proporción sería:

$$\frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} = \frac{0,2169 \text{ m}^3}{X \text{ L}}; \text{ de aquí despejamos X y tendremos que:}$$

$$X = \frac{0,2169 \text{ m}^3 * 1000 \text{ L}}{1 \text{ m}^3} = 216,9 \text{ litros. Entonces, el cilindro puede contener cerca de 217 litros.}$$

Si requieres calcular el área de un cilindro, también necesitamos el área de la base (en este caso, la suma de dos bases) y el área lateral, que se calcula más fácilmente ( $A_L = 2\pi Rh$ ).



## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído sobre el volumen de conos y cilindros, ha llegado el momento de verificar lo que has logrado comprender. A continuación se proponen algunos ejercicios.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- 1 ¿Cuál es el valor, en metros cúbicos, de un tanque de agua potable de 1,5 m de altura y un diámetro de 1 m? ¿Cuántos litros de agua podría contener?  
(Respuesta:  $0,75\text{m}^3$ , 750 litros)
- 2 ¿Cuánto helado cabe en un cono o barquillo que mide 7,5 cm de altura y tiene una boca de 5 cm de diámetro? (Respuesta:  $18.75\text{cm}^3$ . ¿Te animarías a intentar averiguar cuánto es eso en litros?)
- 3 Encuentra el área total de un cono de 5 cm de radio y una generatriz de 9 cm  
(Respuesta:  $219,91 \text{ cm}^2$ )

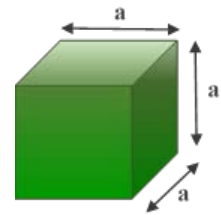
## ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces nueva información, es momento de ver de qué manera podrías utilizarla para explicar lo que sucede en tu localidad o en tu experiencia. Recuerda que puedes revisar, cada vez que sea necesario, los textos que has leído previamente. ¡Y a veces vale la pena realizar los ejercicios con ayuda de algún compañero o compañera!



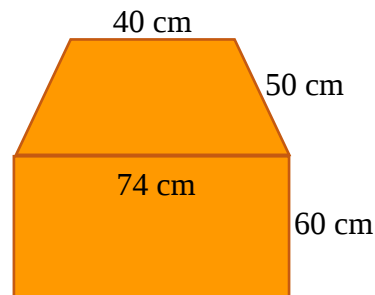
## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. ¿Recuerdas que la superficie o área de un cubo se hallaba a partir de las medidas de sus aristas? ¡Vamos a tratar de ver cómo se relacionan área y volumen! El **área total** (la superficie sumada de todas sus caras) de un cubo es de  $150 \text{ m}^2$ . ¿Cuál es el **volumen total** del cubo?



2. Este problema te permitirá movilizar muchas de tus capacidades. Se tiene una mezcladora para concreto cuyas dimensiones están indicadas en el esquema. Encuentra:

- a. El volumen total de la mezcladora (exprésalo en  $\text{m}^3$ ).



## ACTIVIDAD FINAL

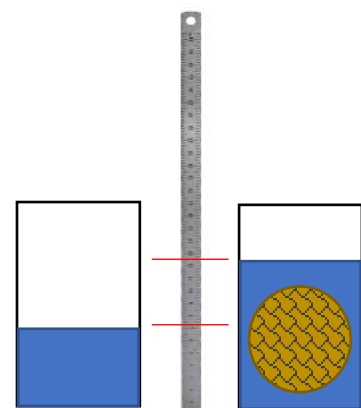
Ahora vamos a nuestros **reservorios comunales**... ¡Pero **primero hagamos un experimento** con una pelota!

¡Vamos a medir el volumen de un balón de fútbol!

Para esto necesitas conseguir un recipiente de plástico (puede ser un balde, una tina o un cilindro; en cualquier caso, asegúrate de que el balón entre completamente dentro del balde o del recipiente que consigas).

Para medir este volumen vas a poner agua en el recipiente, pero no de forma arbitraria, sino midiendo lo que introduces para poder graduar el volumen que va entrando en el recipiente.

Por ejemplo, si tienes un balde grande donde entre el balón, puedes echar agua de litro en litro e ir marcando en la superficie interna del balde cada vez que aumentas un litro de agua. Entonces tendrás un recipiente graduado. Luego, al sumergir el balón este desplazará tanta agua como la medida de su volumen (como en el esquema del lado derecho).



Ahora puedes medir directamente el volumen del balón.

Si tienes un recipiente perfectamente cilíndrico, puedes medir el radio del cilindro y, de acuerdo con la altura medida, calcular el volumen del balón o de cualquier otro cuerpo irregular, ¡porque el balón ocupa ese espacio y desplaza el agua "hacia arriba"!

Al graduar tu recipiente tendrás marcas por cada litro de volumen de agua. Recuerda que 1 litro son  $1000 \text{ cm}^3$ . Además, puedes medir la longitud entre las marcas de tu recipiente para calcular los valores intermedios al sumergir el balón. Aquí aplicas una proporción que te permitirá conocer el volumen entre estas marcas intermedias.



### Tu reto

1. Toma las **medidas del reservorio** de agua familiar o comunal (¡tal vez tenga forma irregular, así que puedes “descomponer” la figura en varias partes, como en el ejercicio de la mezcladora!).
2. **Calcula el volumen de agua** que contiene el reservorio y exprésalo en  $\text{m}^3$  y en litros.
3. Si por efecto del arrastre de **sedimentos** entran en el reservorio aproximadamente 5 cm de altura de sedimentos al año, ¿qué volumen se le resta al reservorio comunal cada año? ¿Cuántos metros cúbicos de sedimento habría que retirar al cabo de un año?

## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:

**Lo aprendido:** ¿Qué sé ahora que no sabía antes? ¿Qué cosas necesito explorar más y qué dudas me quedan? ¿Lo que he visto tiene relación con experiencias de mi vida cotidiana?

**El proceso:** ¿Fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Qué recursos utilicé para aprender y a quiénes recurrí para aprender más? ¿A qué compañeros o compañeras puedo acudir cuando tengo dificultades en comprender conceptos de matemáticas?



## SOLUCIONARIO

### 1. El volumen del cubo

Como el área del cubo es:  $A = 6a^2$  (porque tiene seis lados o caras), entonces igualamos ese dato con el ofrecido en el enunciado; así:

$6a^2 = 150$ . Despejando  $a$ , tendremos  $a^2 = 150/6 = 25$

Luego:  $a = \sqrt{25} = 5$ . Entonces, la arista mide 5 m, valor con el que calculamos el volumen.

$V = a^3 = (5)^3 = 125 \text{ m}^3$ .

El volumen es, entonces,  $125 \text{ m}^3$ .

### 2. El volumen de la mezcladora

Calcula primero el volumen de cada parte de la mezcladora. Como ves, la parte inferior es un cilindro, y la parte superior, un cono trunco.

Si el área del cilindro es:  $V = \pi * R^2 * h$

y el área de un cono trunco es:  $V = \frac{h}{3} \pi (R^2 + r^2 + R * r)$

¿Te animas a encontrar la solución sumando esos dos resultados?

## Actividad final

### El reservorio comunal

Si en tu familia hay un reservorio tipo “tanque”, observa en la imagen cómo se ha calculado su capacidad de almacenamiento.

#### Especificaciones Técnicas

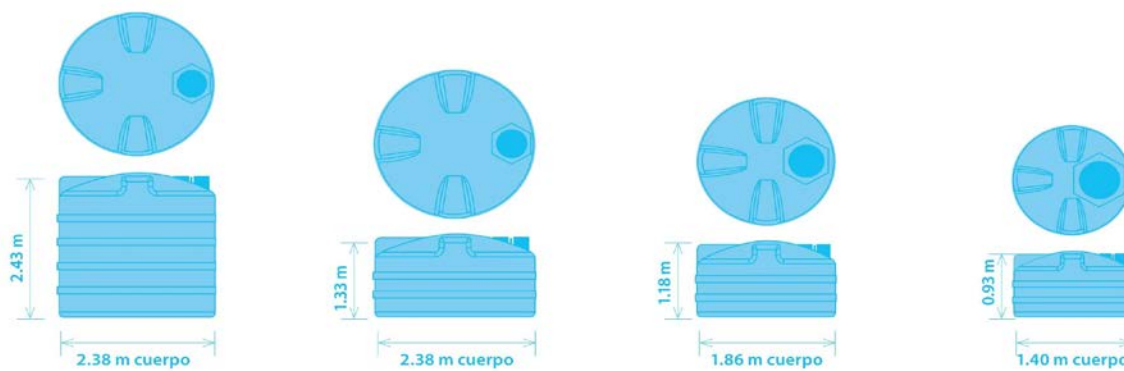
- Material fabricado con PEAD (Poliétileno de alta densidad) de color azul por fuera y blanco por dentro.
- Capacidades desde 1 200 L hasta 10 000 L.

#### Capacidades de Cisterna Garantía de por vida

| Capacidad (L) | Diámetro (m) | Altura con tapa (m) | Diámetro Tapa (m) | Abastecimiento (personas) |
|---------------|--------------|---------------------|-------------------|---------------------------|
| 1 200*        | 1.40         | 0.93                | 0.45              | 5                         |
| 2 800         | 1.86         | 1.18                | 0.60              | 10                        |
| 5 000         | 2.38         | 1.33                | 0.60              | 15                        |
| 10 000        | 2.38         | 2.43                | 0.60              | 35                        |

\*1 200 L incluye: Válvula de Llenado de 19.05 mm (3/4") con Reducción a 12.7 mm (1/2"), Flotador No. 7 y Bomba Centrífuga 1/2 HP.

**Nota:** Considere en la altura de la Cisterna una tolerancia de +5 cm.



Supongamos que el reservorio comunal tiene una forma regular. Si de largo tiene 25 m, de ancho 9 m y de profundidad 2,5 m, se trata de un prisma. Su volumen es el producto de esas tres dimensiones:  $25 \text{ m} \times 9 \text{ m} \times 2,5 \text{ m} = 562,25 \text{ m}^3$

Si cada año se acumulan 5 cm de altura de sedimento, ese volumen es:  $25 \text{ m} \times 9 \text{ m} \times 0,05 \text{ m} = 11,25 \text{ m}^3$ . Eso significa que el segundo año se duplica esa cifra, el tercero se triplica, y así hasta el quinto año. Así, al cabo de cinco años, el reservorio habrá perdido la capacidad de almacenar:  $11,25 \times 5 = 56,25 \text{ m}^3$ .

Unidad de Aprendizaje N.º 3

# ¡Puedo calcular la productividad de la chacra!

| Área       | Duración                                   |
|------------|--------------------------------------------|
| Matemática | 4 semanas: del 5 al 30 de octubre del 2020 |

## ¿Qué vamos a aprender?

Estimada y estimado estudiante:

En esta unidad vamos a conocer algunos conceptos y algunas técnicas matemáticas para organizar e interpretar datos. Existen situaciones en las que la información se presenta como un grupo o un conjunto desordenado de datos, que necesitamos organizar y sistematizar. Si no lo hacemos, no podremos tener una comprensión más precisa de la realidad. Para ello, necesitamos aprender algunos criterios y herramientas matemáticas del ámbito que se conoce como estadística. ¡Y es precisamente eso lo que vamos a aprender en esta primera parte!

En la segunda parte nos acercaremos al cálculo de probabilidades, que también es una forma fascinante de tener mucha información, pero de una manera compacta.



**Ejes:** Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos / Soberanía alimentaria y productiva.

| COMPETENCIAS                                                                                                                                       | CAPACIDADES                                                                                                                                                                                                                                                                                         | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.                                                                                            | Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.<br>Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.<br>Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.<br>Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida. | Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa.<br>Recolecta datos y los registra en tablas; determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada con su tema de estudio, proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico. Sobre esa base, contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. |
| <b>ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.</b> Tablas de frecuencias. Representación gráfica. Medidas de centralización y medidas de dispersión. Probabilidad. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

## “Esto es importante porque...”

Hace unos años, en la comunidad de Pantipata (Chinchaypujio, Anta) se incrementó notablemente la siembra de quinua, superando a la de otros granos. ¿Sabes por qué? Porque entre los años 2010 y 2014 hubo una gran demanda de quinua en Europa y Norteamérica, que produjo además una cotización muy alta del kilo de quinua (¡llegó a costar hasta 18 soles!). Por eso los comerciantes mayoristas empezaron a recorrer los mercados y las comunidades para comprar este producto. Sin embargo, unos años después, analizando los mercados, muchos países del Asia, especialmente China, comenzaron a producir quinua. Y así, en los siguientes años, el mercado fue acaparado por los productores de estos países.

Conocer y manejar datos es muy importante, no solo para interpretarlos, sino también para **tomar decisiones** y generar **oportunidades de desarrollo** económico y social.

A lo largo del tiempo, la necesidad de gestionar la información para tomar decisiones ha dado origen



Imagen tomada de Cooperativa Agroindustrial de Cultivos Andinos Orgánicos de Anta (COOPAINCA).

a una disciplina matemática que se denomina estadística. Ella nos ofrece muchas herramientas y técnicas para recolectar, organizar, representar, interpretar y analizar datos.

¿Te imaginas si cada familia pudiera saber cuánto produce su chacra y calcular de manera más acertada sus ingresos para luego invertirlos? ¿Has visto cómo hacen en tu familia para calcularlo? ¿Te gustaría participar de ese proceso? ¿Qué necesitas saber para que escuchen tus ideas al respecto?

**Tu reto:** Calcula la **capacidad de producción** de la chacra familiar usando las herramientas de la **estadística**.

## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Para comenzar, vas a recurrir a las cosas que ya sabes. Como verás, hay mucha información y experiencias que has vivido que pueden ser útiles para lo que vas a aprender.

### Actividad 1: Lo que sabemos...

¿Has escuchado afirmaciones como las siguientes? Anota, debajo de cada una, si conoces su significado... ¡y compara tus respuestas con alguna compañera o compañero que viva cerca!

|                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>El promedio de edad en este salón es 16,8 años; en las otras aulas es 17,45 años...</i>                                                                |
|                                                                                                                                                           |
| <i>Las mujeres tienen una expectativa de vida mayor que la de los varones; ellas pueden vivir, en promedio, hasta los 82 años; ellos, hasta los 78...</i> |
|                                                                                                                                                           |
| <i>En esta chacra se producen, en promedio, 150 kilos más que en las otras...</i>                                                                         |
|                                                                                                                                                           |

¡Antes de terminar esta Unidad de Aprendizaje, **revisa** lo que escribiste!

## Exploramos la temática (I)



Quizás en el transcurso del tiempo veas crecer a los animales, como vacas, cerdos, ovejas, pollos o cuyes. Todos ellos tienen un ritmo de crecimiento particular. Una forma de apreciarlo de modo directo es precisamente registrando su peso en intervalos regulares de tiempo, que pueden ser días, semanas o meses. Esto nos permite organizar esta información de una manera útil y práctica, lo que nos permitirá tomar decisiones convenientes como incrementar la dosis de alimento o calcular el mejor momento para la venta. En esas situaciones se usan herramientas de la estadística.

### Actividad 2: Nos acercamos a los conceptos básicos

Si quisiéramos conocer el ritmo de crecimiento de nuestros cuyes, necesitaremos pesarlos cada dos o tres días. Pero si tenemos 40 crías en nuestro pequeño galpón, no necesitamos pesar a todos, sino solo a una pequeña parte; digamos, a unos 5 cuyes: esta será la **muestra** de toda la **población** de cuyes que tenemos. Esta es la herramienta más potente de la estadística, ya que una muestra pequeña nos puede ofrecer, con una buena aproximación, lo que pasa en toda la población. **¡Vamos a leer un poco sobre esto!**

#### Texto 1

##### DEFINICIONES BÁSICAS

**POBLACIÓN:** es un conjunto de elementos (objetos, animales, personas, etcétera) en los cuales podemos distinguir determinadas **características observables**, de manera que estas puedan ser medidas o tener una cualidad.

**Característica observable:** se denomina así a esa condición que presenta el objeto, animal, individuo, etcétera, por la cual puede ser medido o no. Así, por ejemplo, en una población de niños de 3 años podemos medir su talla y peso, que constituyen características observables cuantitativas. En una fábrica de ladrillos puede haber piezas defectuosas, de modo que su característica observable será cualitativa. En una población de cuyes, para observar su crecimiento, la característica observable será cuantitativa, porque podemos medir su peso.



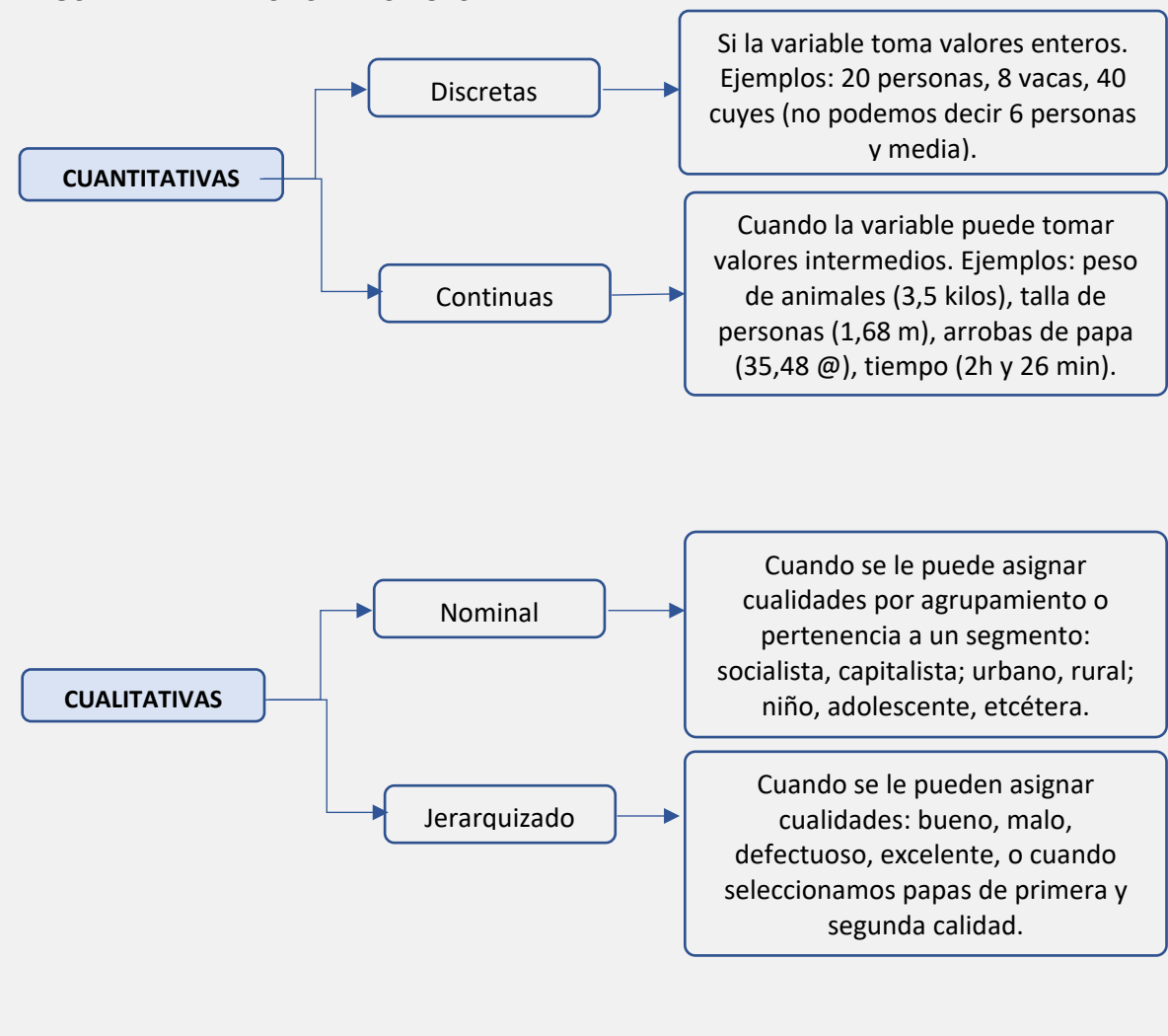
**MUESTRA:** es una parte de la población que elegimos para extraer información que represente a toda la población. El número de elementos de la muestra se llama "tamaño de la muestra". Por ejemplo, si de las 40 crías de cuyes del pequeño galpón tomamos una muestra de 5 cuyes, entonces el tamaño de la muestra será 5.

**VARIABLE ESTADÍSTICA:** es la característica observable o medible a través de la cual estudiamos a la población. Puede ser cuantitativa (cuando podemos medir) y cualitativa (cuando presenta características que no se pueden medir pero sí caracterizar).

**Variable cualitativa:** por ejemplo, el estado emocional de una persona (alegre, feliz, triste, enfadada, afectiva) no se puede medir, pero sí le podemos asignar alguna escala para diferenciarlo de otras características de los seres humanos. Se trata, entonces, de una variable cualitativa. En las competencias deportivas, alguien alcanza el primer lugar, otro el segundo, uno más el tercero y así sucesivamente. Estas son variables cualitativas que no podemos medir pero sí jerarquizar.



## TIPOS DE VARIABLES ESTADÍSTICAS



## Verificamos lo comprendido

Ahora que has leído algunas descripciones sobre estos conceptos estadísticos, **hagamos tres ejercicios** cortos para ensayar cómo los manejas.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- 1 En un taller textil fabrican 30 docenas de camisas al mes. Si, para determinar la calidad, se escoge una parte de la producción mensual (digamos, el 5 %), ¿de cuántas camisas hablamos? ¿A qué concepto corresponde ese grupo de camisas elegidas? (Respuesta: 18 camisas; es el tamaño de la **muestra**.)
- 2 En la cosecha anterior, el 30 % de la producción fue de primera, el 65 % de segunda y el 5 % Tapura. ¿Qué **tipos de variables** estamos aplicando? (Respuesta: para determinar los volúmenes de producción de la papa utilizamos una variable **cuantitativa**, y para establecer la calidad de la producción, una **cualitativa**.)
- 3 Escribe dos ejemplos, uno donde se utilice una variable cualitativa y otro donde se use una variable cuantitativa. Luego, señala sus diferencias recurriendo a la información del texto 1: “Definiciones básicas”.

## Texto 2

### LAS TABLAS DE FRECUENCIA

Para clasificar la información de la muestra o de una determinada población se utilizan las denominadas **tablas de frecuencias**, que son tablas organizadas de acuerdo con las variables que estamos observando.

**Ejemplo 1.** En la comunidad de Ankawasi se ha hecho una encuesta para saber cuántas horas dedican las y los estudiantes a ver el programa “Aprendo en Casa” por televisión. Se tomó una muestra de 20 estudiantes y los resultados aparecen en la tabla siguiente.

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Alumno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Horas  | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 2  |

Como nos permite apreciar esta primera, los estudiantes ven la televisión durante varias horas: 2, 3, 4, 5...

Pero es posible agrupar los datos de manera más eficiente. Por ejemplo, podemos ver que 8 estudiantes miran la TV durante 3 horas, 5 durante 2 horas, 5 por 4 horas y 2 por 5 horas. Entonces, la tabla de frecuencias nos ayuda a organizar la información de la siguiente manera:

Para construir nuestra **tabla de frecuencias** necesitamos conocer un concepto estadístico: la frecuencia.

| i | Número de horas | f  |
|---|-----------------|----|
| 1 | 2               | 5  |
| 2 | 3               | 8  |
| 3 | 4               | 5  |
| 4 | 5               | 2  |
| n |                 | 20 |

La **frecuencia** es el número de veces que se repite un dato. A partir de la información anterior, por ejemplo, podemos ver que para 3 horas el dato se repite 8 veces, de donde su frecuencia es 8. Para 2 horas, la frecuencia es 5; y para 4 horas, la frecuencia es 5. A este tipo de frecuencia se le conoce en estadística como **frecuencia absoluta**, y su símbolo es “**f**”. Con este concepto nuevo, nuestra tabla ya será una tabla de frecuencia. Entonces, podemos organizar los datos anteriores de una nueva manera.

Donde el número total de observaciones “**n**” es el tamaño de la muestra:  $n = 20$



Además de la frecuencia absoluta, en estadística se manejan la **frecuencia relativa** y la **frecuencia acumulada**, que son útiles para otras aplicaciones.

**Frecuencia relativa:** se simboliza como “ **$h_i$** ” y se define como la frecuencia absoluta sobre el tamaño de la muestra:  $h_i = \frac{f_i}{n}$

**Frecuencia acumulada:** es un tipo de frecuencia que nos indica cómo se van acumulando las frecuencias en la muestra. Para obtener la frecuencia acumulada los datos deben estar ordenados en forma creciente. Se simboliza con “ **$H_i$** ” y se consigue sumando consecutivamente las frecuencias absolutas.

Con estos nuevos conceptos, reconstruyamos la tabla anterior.

Para esto, primero ordenamos los datos de la tabla en forma ascendente, es decir, del menor número de horas al mayor número de horas. Esta es nuestra variable estadística, y por eso le asignamos además la variable  $x$ .



| $x_i$ | $f_i$     | $h_i$    | $H_i$ |
|-------|-----------|----------|-------|
| 2     | 5         | 0,25     | 5     |
| 3     | 8         | 0,4      | 13    |
| 4     | 5         | 0,25     | 18    |
| 5     | 2         | 0,1      | 20    |
|       | <b>20</b> | <b>1</b> |       |

Aquí, para la frecuencia relativa:  $h_1 = 5/20 = 0,25$ ;  $h_2 = 8/20 = 0,4$ , y así para cada dato. Y para la **frecuencia acumulada** sumamos la frecuencia acumulada anterior con la siguiente absoluta. (Empezamos con 5; luego, para el siguiente,  $5 + 8 = 13$ ; para el siguiente,  $13 + 5 = 18$ ; y para el ultimo,  $18 + 2 = 20$ ). La **última frecuencia acumulada** debe coincidir con el **tamaño de la muestra** (en este caso,  $n = 20$ ).

Como ves, ¡esta es nuestra “**tabla de frecuencias**”!

### Texto 3

#### REPRESENTACIÓN GRÁFICA

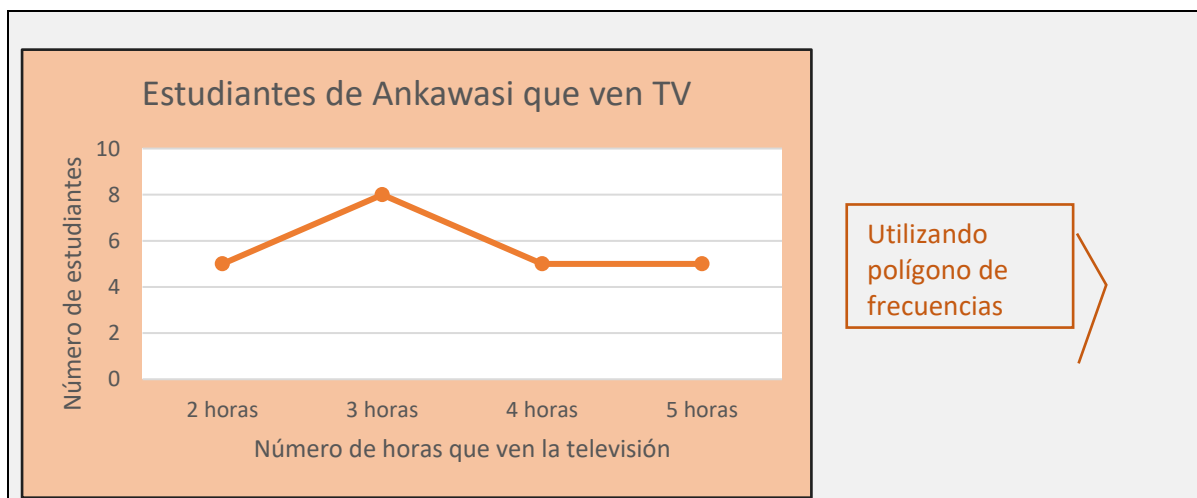
Para representar gráficamente la información utilizamos los denominados **histogramas de frecuencia, polígonos de frecuencia o barras**. Estos son esquemas que se consiguen representando los datos en un sistema coordenado. Si lo hacemos manualmente, necesitaremos trazar un sistema coordenado sobre el cual representamos este conjunto de datos. En uno de los ejes (vertical o de las ‘Y’) ponemos el número de estudiantes, y en el otro (horizontal o de las ‘X’) el número de horas que ven la televisión.

**Ejemplo 2.** Representaremos gráficamente los resultados de la tabla anterior.



Utilizando barras

¿Ves cómo la barra azul coincide con el número de estudiantes de nuestra tabla de frecuencias anterior?



## Verificamos lo comprendido

Ahora que conoces una tabla de frecuencias y la forma de representarla gráficamente, vamos a ejercitarnos en usar estos conceptos.

### EJERCICIO DE AFIANZAMIENTO

1

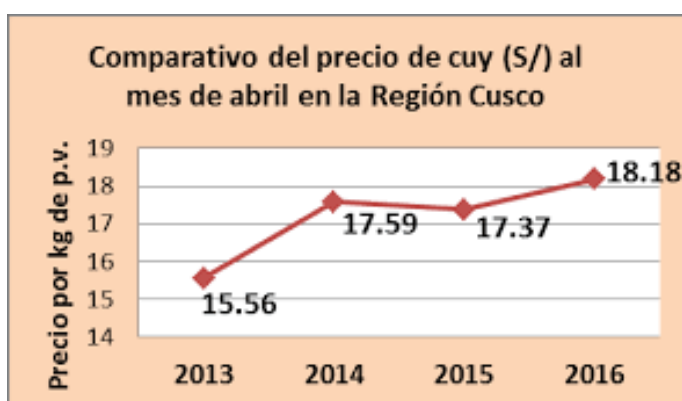
En el 4.º grado de secundaria del colegio de Paucarcoto se han medido las tallas de los estudiantes y se han registrado los siguientes valores (en metros): 1,5; 1,55; 1,48; 1,48; 1,50; 1,62; 1,62; 1,62; 1,65; 1,38; 1,68; 1,60; 1,50; 1,50; 1,62.

A partir de estos datos:

- Construye una tabla de frecuencias.
- Representa gráficamente esta información utilizando barras.

2

En el siguiente gráfico se representa la variación del precio de la carne de cuy en nuestra región. Observa el polígono de frecuencia y describe la información que presenta. (Respuesta: entre 2013 y 2014 el precio se elevó; luego tuvo una ligera baja, para repuntar en 2016.)



¡Las hojas de cálculo del programa Excel hacen esto por ti! Si puedes acceder a una computadora y aún no conoces este programa, puedes encontrar tutoriales que te explican sencillamente cómo utilizarlo para introducir datos y representarlos. Este programa te permite elegir qué gráficos quieres usar para representar los datos. ¡Es muy práctico para trabajos con estadística!

### Texto 3

#### INTERVALOS DE CLASE

Existe para las variables continuas una forma más regular de agrupar los datos. Consiste en ubicar los datos en intervalos que tengan el mismo tamaño, para hacer una lectura más directa en función de las frecuencias.

Para esto debemos dar los siguientes pasos:

1.º paso: ordenamos los datos de manera creciente.

2.º paso: calculamos el **rango** (que es la diferencia entre el dato de mayor valor y de menor valor numérico:  $R = R_{\max} - R_{\min}$ )

3.º paso: calculamos los intervalos.

4.º paso: contabilizamos las frecuencias.

Para el 3.º paso, calculamos un parámetro “C” que se denomina “**amplitud de clase**” y se define como:  $C = \frac{R}{K}$ , donde R es el rango y K el “**número de clase**” ( $k = 5$ , si el tamaño de la muestra  $n < 25$ ; si  $n > 25$ ,  $K = \sqrt{n}$ ), como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.** Para aplicar este criterio, el de intervalos de clase, agrupemos los datos de las tallas de estudiantes del ejercicio de afianzamiento 1 de la página anterior.

#### ¿Cómo se hace?

¡Este ejemplo lo desarrollaremos detalladamente, paso a paso, para que te acostumbres a las herramientas! Entonces, realizando cada paso, tendremos:

**1.º paso:** ordenamos los datos en forma creciente (talla de estudiantes en metros).

1,38; 1,48; 1,48; 1,50; 1,50;

1,50; 1,50; 1,55; 1,60; 1,62;

1,62; 1,62; 1,62; 1,65; 1,68

**2.º paso:** calculamos el rango:  $R = R_{\max} - R_{\min}$ . Aquí:  $R_{\max} = 1,68$  y  $R_{\min} = 1,38$

Entonces:  $R = 1,68 - 1,38 = 0,30$

**3.º paso:** calculamos los intervalos; previamente, calculamos la amplitud de clase. Aquí el tamaño de la muestra es  $n = 15$  ( $n < 25$ ), y por eso el **número de clase** es  $K = 5$ . (Esto además quiere decir que tendremos 5 intervalos.)

Entonces:  $C = \frac{R}{K} = \frac{0,3}{5} = 0,06$

Ahora sí, con este resultado calculamos los intervalos (intervalos de clase).

Los intervalos tienen dos extremos: comienzan con el primer dato (el del menor valor numérico) y para el otro extremo agregamos la amplitud. Así:

Primer intervalo  $i = 1$   $[1,38 - 1,38 + 0,06[ = [1,38 - 1,44[$

Segundo intervalo  $i = 2$   $[1,44 - 1,44 + 0,06[ = [1,44 - 1,50[$

Tercer intervalo  $i = 3$   $[1,50 - 1,50 + 0,06[ = [1,50 - 1,56[$

Cuarto intervalo  $i = 4$   $[1,56 - 1,56 + 0,06[ = [1,56 - 1,62[$

Quinto intervalo  $i = 5$   $[1,62 - 1,62 + 0,06[ = [1,62 - 1,68[$

Aquí puedes notar que los intervalos están cerrados en el primer extremo y abiertos en el segundo extremo (excepto el último intervalo). Será importante tomar en cuenta esto para contabilizar las frecuencias.



#### 4.º paso: contabilizamos las frecuencias.

Para esto, observando los intervalos, comenzamos con el primero  $[1,38 - 1,44[$ . Este intervalo nos indica que debemos ver cuántos datos existen desde 1,38 hasta 1,44. Contamos cuántos y, al hacerlo, encontramos solo uno. Entonces, diremos  $f_1 = 1$  (*resaltado en color amarillo*).

Para el siguiente intervalo,  $[1,44 - 1,50[$  **ATENCIÓN:** aquí nos indica desde 1,44 hasta 1,50, pero no debemos tomar 1,50, porque el intervalo es abierto. Entonces, contando sobre los datos, solo tenemos dos, de modo que  $f_2 = 2$  (*resaltado en verde*).

Para el siguiente intervalo,  $[1,50 - 1,56[$ , desde 1,50 hasta 1,56. Entonces, contando sobre los datos, aquí  $f_3 = 5$  (*resaltado en celeste*).

Para el siguiente intervalo,  $[1,56 - 1,62[$ ,  $f_4 = 1$  (*resaltado en fucsia*).

Finalmente, para el siguiente intervalo,  $[1,62 - 1,68[$ ,  $f_5 = 6$ .

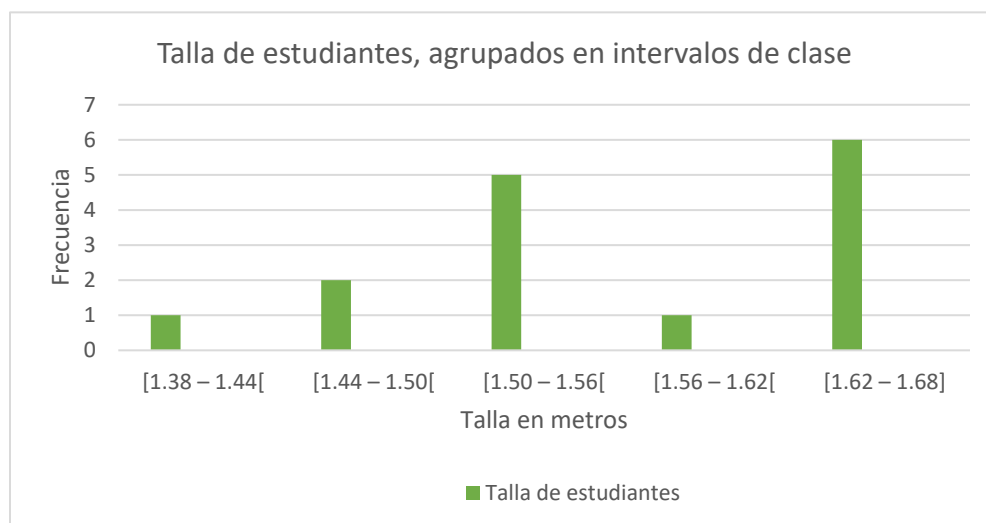
1,38; 1,48; 1,48; 1,50; 1,50;  
1,50; 1,50; 1,55; 1,60; 1,62;  
1,62; 1,62; 1,62; 1,65; 1,68

Con estos datos completamos la tabla de frecuencias:

| i | Intervalos      | $f_i$ | $h_i$ | %     |
|---|-----------------|-------|-------|-------|
| 1 | $[1,38 - 1,44[$ | 1     | 0,066 | 6,66  |
| 2 | $[1,44 - 1,50[$ | 2     | 0,133 | 13,33 |
| 3 | $[1,50 - 1,56[$ | 5     | 0,333 | 33,33 |
| 4 | $[1,56 - 1,62[$ | 1     | 0,066 | 6,66  |
| 5 | $[1,62 - 1,68[$ | 6     | 0,4   | 40    |
| n |                 | 15    | 1.00  | 100%  |

En esta tabla hemos incluido las frecuencias relativas y, además, el porcentaje (que se obtiene multiplicando por 100 la frecuencia relativa). Aquí podemos ver los mayores porcentajes precisamente en los valores más altos de las frecuencias.

Gráficamente, lo podemos representar con un diagrama de barras (también es posible trazarlo manualmente sobre un sistema coordenado o a través de una hoja de cálculo; por ejemplo, usando el programa Excel).



El gráfico nos indica que la talla que más se presenta en este grado, está entre 1,62 m y 1,68 m.

**Ejemplo 4.** En un sector de Chinchaypujio hay muchas chacras donde se han cosechado habas y se ha hecho una estadística de la producción. Para ello se tomaron dos muestras de 10 chacras y se pesó la producción de habas (en kilos) de un metro cuadrado de terreno (se tomaron dos muestras por chacra). Los resultados fueron los siguientes:

4,2; 4,5; 3,8; 2,9; 3,2; 3,2; 3,5; 3,6; 3,6; 3,8; 4,2; 4,5; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1; 3,4; 3,6; 5,2

Vamos a elaborar una tabla de frecuencias y representar gráficamente.

## Solución

(Ahora vamos a trabajar directamente sobre la tabla de frecuencias.)

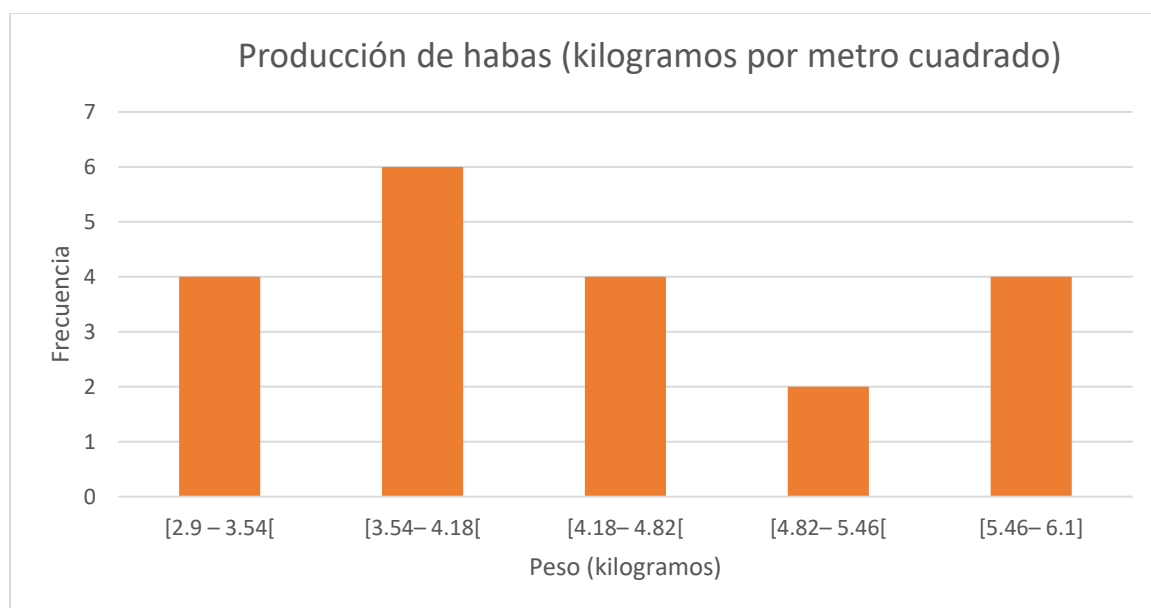
Para esto ordenamos los datos en forma creciente:

2,9; 3,2; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,6; 3,8; 3,8  
4,2; 4,2; 4,5; 4,5; 5,2; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1

Y calculamos la amplitud de clase  $C = \frac{R}{K} = \frac{(6,1-2,9)}{5} = 0,64$ . (Aquí,  $K = 5$ , porque  $n < 25$ ). Con esto constituimos la tabla de frecuencias:

2,9; 3,2; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,6; 3,8; 3,8  
4,2; 4,2; 4,5; 4,5; 5,2; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1

| i | Intervalos (kilos) | f <sub>i</sub> | h <sub>i</sub> | %    |
|---|--------------------|----------------|----------------|------|
| 1 | [2,9 – 3,54[       | 4              | 0,2            | 20   |
| 2 | [3,54– 4,18[       | 6              | 0,3            | 30   |
| 3 | [4,18– 4,82[       | 4              | 0,2            | 20   |
| 4 | [4,82– 5,46[       | 2              | 0,1            | 10   |
| 5 | [5,46– 6,1]        | 4              | 0,2            | 20   |
| n |                    | 20             | 1.00           | 100% |



El gráfico nos muestra que la mayor parte de las veces las chacras producen entre 3,54 y 4,8 kilos de habas por metro cuadrado.

### Texto 4

#### MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Cuando realizamos varias mediciones, como el peso o las tallas de personas, o hacemos medidas de cualquier índole, podemos extraer una medida representativa de todos estos datos. A esto le denominamos **indicador de tendencia central** (o, también, índice de localización central). Existen varios tipos de estos indicadores: la media aritmética, la moda, la mediana, los cuartiles, percentiles, entre otros. A este conjunto de localizadores se les conoce como medidas de centralización (o de tendencia central). En esta parte vamos a conocer algunas.

### MEDIA ARITMÉTICA: $\bar{X}$

La media aritmética, en resumen, es el valor promedio de los datos de una muestra. Para saber cómo se encuentra, consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.** Vamos a encontrar la **media aritmética** de las tallas del ejemplo que viste unas páginas atrás. Las medidas son:

1,38; 1,48; 1,48; 1,50; 1,50; 1,50; 1,50; 1,55; 1,60; 1,62; 1,62; 1,62; 1,62; 1,65; 1,68

#### ¿Cómo se obtiene?

Tenemos 15 datos, es decir,  $n = 15$ .

Lo que hacemos es sacarle un promedio, al que llamaremos  $\bar{X}$ . Entonces, calculamos:

$$\bar{X} = \frac{1,38 + 1,48 + 1,48 + 1,50 + 1,50 + 1,50 + 1,50 + 1,55 + 1,60 + 1,62 + 1,62 + 1,62 + 1,62 + 1,65 + 1,68}{15}$$
$$\bar{X} = \frac{2330}{15} = 1,553$$

Entonces, la media aritmética es:  $\bar{X} = 1,553$ . Esto quiere decir que la talla promedio de 4.º de media de la IE Paucarcoto es de 1,553 metros.

La media aritmética, o media, también se escribe con el signo " $\sum$ ", que se llama **sumatoria** y sirve para indicar que se realizará una suma de varios términos (representados por  $x_i$ ), que en el caso anterior van desde el 1 hasta el 15.

$n$  es la cantidad de datos.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k}{n}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{i=15} \frac{x_i}{n}$$



### MODA: $M_o$

Este indicador central es muy fácil de encontrar: solo tenemos que ver qué dato de la muestra es el que se repite más veces.

**Ejemplo 6.** Encontremos la moda de los datos de la muestra del ejemplo 2 sobre la cosecha de habas en diferentes chacras:

4,2; 4,5; 3,8; 2,9; 3,2; 3,2; 3,5; 3,6; 3,6; 3,8; 4,2; 4,5; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1; 3,4; 3,6; 5,2

#### ¿Cómo se obtiene?

Observamos los datos y encontramos que el que más se repite es 3,6. Luego, esta es la moda.

$$M_o = 3,6$$

### MEDIANA: $M_e$

Es otro estadígrafo, o indicador central, también sencillo de encontrar en el conjunto de datos de la muestra. Para esto, primero ordenamos los datos de forma creciente; luego, ubicamos el valor que se encuentra en el medio. Es decir, la mediana divide la observación en dos grupos con igual cantidad de datos.

**Ejemplo 7.** Encontremos la mediana de los datos de la muestra del ejemplo de la cosecha de habas:

4,2; 4,5; 3,8; 2,9; 3,2; 3,2; 3,5; 3,6; 3,6; 3,8; 4,2; 4,5; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1; 3,4; 3,6; 5,2

### ¿Cómo se obtiene?

Entonces, primero ordenamos en forma creciente:

2,9; 3,2; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,6; 3,8; 3,8; 4,2; 4,2; 4,5; 4,5; 5,2; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1

Ahora, como tenemos 20 datos ( $n = 20$ ), el valor que se encuentra en la posición del medio será la mediana. Para ubicar la posición se realiza la siguiente operación:  $(n+1)/2 = 21/2 = 10,5$ . Es decir, ubicamos la posición entre la posición 10 y la posición 11 (como ves, la resaltamos con color verde):

2,9; 3,2; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,6; 3,8; 3,8; 4,2; 4,2; 4,5; 4,5; 5,2; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1

Aquí encontramos dos valores: 3,8 y 4,2

Cuando el número de datos es impar, es más fácil determinar la  $M_e$ , pues sería justo el valor que está en la posición del medio. En el caso de una cantidad de datos par, siempre ocurrirá el caso de tener dos valores en la posición del medio. Esto normalmente lo resolvemos tomando el promedio de estos dos datos, así:

$M_e = (3,8 + 4,2)/2 = 4$ . Entonces, la media es  $M_e = 4$ .

### CUARTIL: $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$

Los cuartiles son un tipo de indicador central que divide el conjunto de datos (ordenados en forma ascendente o descendente) en cuatro partes iguales. Por esta razón, el primer cuartil,  $Q_1$ , es el 25 %; el segundo cuartil,  $Q_2$ , el 50 %; y el tercer cuartil,  $Q_3$ , el 75 %.

Veamos con un ejemplo cómo se encuentren estos cuartiles.

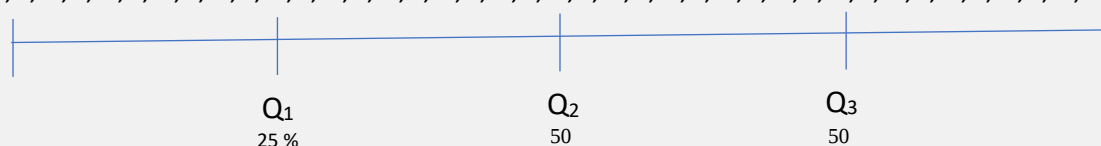
**Ejemplo 8.** Encontremos la mediana de los datos de la muestra del ejemplo de la cosecha de habas:

4,2; 4,5; 3,8; 2,9; 3,2; 3,2; 3,5; 3,6; 3,6; 3,8; 4,2; 4,5; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1; 3,4; 3,6; 5,2

### ¿Cómo se obtiene?

Entonces, primero ordenamos los datos en forma creciente:

2,9; 3,2; 3,2; 3,4; 3,5; 3,6; 3,6; 3,6; 3,8; 3,8; 4,2; 4,2; 4,5; 4,5; 5,2; 5,2; 5,5; 5,6; 6,0; 6,1



El cuartil  $Q_2$  coincide con la mediana, y para los cuartiles  $Q_1$  y  $Q_3$  los criterios son similares a los que vimos previamente:

Así:  $Q_1 = (3,5 + 3,6)/2 = 3,55$ ; y  $Q_3 = 5,5$

**NOTA:** Los cuartiles son indicadores para datos agrupados en intervalos de clases. Si tienes interés por esta área de la matemática, puedes buscar más información. Así mismo, la media aritmética, la mediana y los otros estadígrafos de tendencia central, para datos agrupados en tablas de frecuencias, también se calculan mediante fórmulas específicas.

## Verificamos lo comprendido

Ahora que conoces sobre los indicadores de tendencia central, vamos a usarlos.

### EJERCICIO DE AFIANZAMIENTO

1

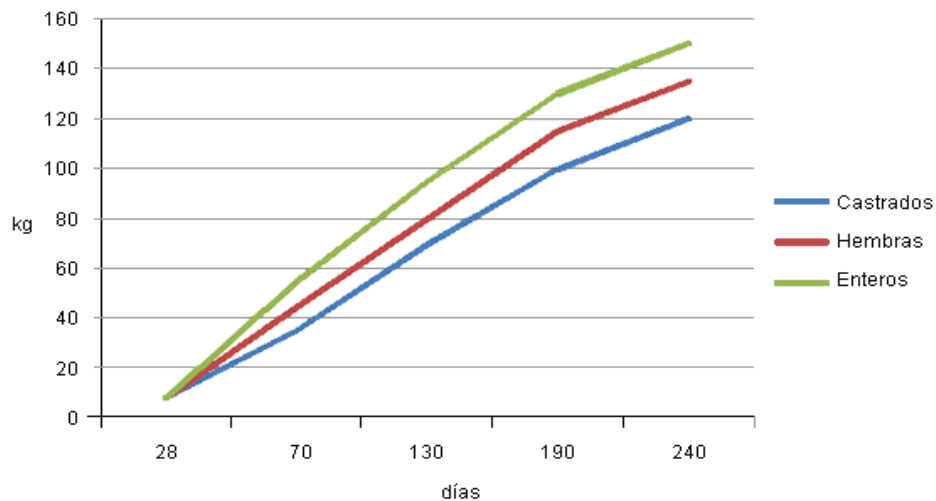
En 1.º de secundaria, la profesora Berila mide el peso de 13 estudiantes y obtiene los siguientes resultados: 56, 42, 38, 45, 47, 38, 49, 50, 39, 41, 42, 43, 38 (en kilos). Determina el peso promedio de sus estudiantes.

2

En el conjunto de los datos anteriores, determina la moda y la mediana.

3

El siguiente gráfico muestra el crecimiento de tres tipos de cerdos. Observa y describe las características que puedes apreciar o la información que logras detectar.



### Texto 5

#### MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión son otro tipo de medidas estadísticas. Nos permiten conocer cómo están variando los datos respecto de los valores promedio o los indicadores centralizados. Es decir, miden el grado de dispersión de los datos: una alta dispersión implica una **baja concentración**, y una baja dispersión indica una **alta concentración**.

Consideremos un ejemplo para apreciar mejor esto.

**Ejemplo 9.** En un restaurante se encuentran 10 personas. Cuando se les preguntaron sus edades, los resultados fueron:

12, 12, 13, 11, 10, 12, 12, 12, 10, 56

#### ¿Cómo se obtiene?

Entonces, el promedio de la edad será:

$$\bar{x} = \frac{12 + 12 + 13 + 11 + 10 + 12 + 12 + 12 + 10 + 56}{10} = \frac{160}{10} = 16$$

El promedio de edad obtenido, 16 años, no coincide con la realidad, pues hay mucha variación respecto del promedio.

Pero si quitamos el dato extremo –es decir, la edad de la persona de 56 años–, tendremos una media de 11,55 años, que es lo que más se ajusta a los datos. Así tendremos muy poca variación. Existen también varios métodos e indicadores de dispersión, como la desviación media, el rango o recorrido, la varianza y la desviación estándar. En esta parte solo veremos uno de ellos, con el propósito de observar cómo se mide la variación de los datos.

### DESVIACION MEDIA $D_m$

Para calcular la desviación media necesitamos agrupar los datos en una tabla de frecuencias. Utilicemos los datos del ejemplo anterior para mostrar cómo.

**Ejemplo 10.** Calcular la desviación media de los datos de la tabla que aparece a la derecha.

#### ¿Cómo se obtiene?

Para calcular la desviación media se utiliza la siguiente relación:

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{f_i |x_i - X|}{n}$$

| i | Edades<br>$x_i$ | $f_i$ |
|---|-----------------|-------|
| 1 | 10              | 2     |
| 2 | 11              | 1     |
| 3 | 12              | 5     |
| 4 | 13              | 1     |
| 5 | 56              | 1     |
|   |                 | 10    |

Entonces, necesitamos calcular el promedio  $X$  y, luego, restarlo de cada dato (cada edad menos el promedio). En el ejemplo anterior, el promedio de edad es:  $X = 16$ . Hecha esta operación, la tabla anterior queda como sigue:

| Índice<br>i | Edades<br>$x_i$ | Frecuencia<br>absoluta<br>$f_i$ | Edad menos<br>promedio<br>$x_i - X$ | Valor absoluto<br>$ x_i - X $ | Por la<br>frecuencia<br>$f_i  x_i - X $ |
|-------------|-----------------|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|
| 1           | 10              | 2                               | $10 - 16 = -6$                      | 6                             | $2 \cdot 6 = 12$                        |
| 2           | 11              | 1                               | $11 - 16 = -5$                      | 5                             | $1 \cdot 5 = 5$                         |
| 3           | 12              | 5                               | $12 - 16 = -4$                      | 4                             | $5 \cdot 4 = 20$                        |
| 4           | 13              | 1                               | $13 - 16 = -3$                      | 3                             | $1 \cdot 3 = 3$                         |
| 5           | 56              | 1                               | $56 - 16 = 40$                      | 40                            | $1 \cdot 40 = 40$                       |
|             |                 | 10                              |                                     |                               | 80                                      |

Reemplazando en la fórmula, resulta:

$$D_m = \frac{80}{10} = 8$$

De otro lado, si quitamos el dato extremo tendremos lo siguiente: primero, el valor promedio cambia, como vimos en el ejemplo anterior, a:  $X = 11,5$ . Con este nuevo promedio, nuestra tabla resulta:

| i | $x_i$ | $f_i$ | $x_i - X$            | $ x_i - X $ | $f_i  x_i - X $       |
|---|-------|-------|----------------------|-------------|-----------------------|
| 1 | 10    | 2     | $10 - 11,55 = -1,55$ | 1,55        | $2 \cdot 1,55 = 3,1$  |
| 2 | 11    | 1     | $11 - 11,55 = -0,55$ | 0,55        | $1 \cdot 0,55 = 0,55$ |
| 3 | 12    | 5     | $12 - 11,55 = 0,45$  | 0,45        | $5 \cdot 0,45 = 2,25$ |
| 4 | 13    | 1     | $13 - 11,55 = 1,45$  | 1,45        | $1 \cdot 1,45 = 1,45$ |
|   |       | 9     |                      |             | 7,35                  |

Reemplazando valores en la relación de desviación estándar, tendremos:

$$D_m = \frac{7,35}{9} = 0,816$$

Si observamos estos dos valores de la desviación media, podemos inferir que esta última tiene menor dispersión.

¡Esta es solo una parte de la estadística que podemos utilizar en nuestras actividades en la comunidad! Ahora que conocemos un poco más de esta ciencia, podemos decir que se clasifica en **estadística descriptiva** y **estadística inferencial**. La estadística descriptiva nos permite recolectar, clasificar, analizar y representar los datos. Por otra parte, la estadística inferencial es la que diseña modelos teóricos y matemáticos para estimar o inferir las leyes o propiedades de una población, ¡y para predecir lo que puede suceder con base en los datos que conocemos!



## Exploramos la temática (II)



¿Has escuchado decir a algunas personas que tienen buena suerte para las cartas o para las apuestas? ¿Alguna vez te ha sucedido que “justo a ti” te llamaron a una evaluación oral cuando en tu aula hay muchas más personas? ¿Has escuchado expresiones como “esto solo pasa en uno de cada 100 casos”? ¡Todas esas expresiones están relacionadas con un concepto matemático: la **probabilidad**! A continuación encontrarás un texto que puede servirte de punto de partida para comprender cómo se calculan las probabilidades. **Léelos, subraya** las ideas centrales y **revisa los ejemplos** que se muestran. ¡Es nuestro último paso antes de ir al reto final!

### Texto 6

#### UN ASUNTO DE PROBABILIDADES...

Las probabilidades son una forma de **calcular los resultados de que suceda algún evento**. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire, no sabemos con total certeza qué lado nos mostrará –la cara el sello– al caer el suelo; sin embargo, podemos calcular la probabilidad de que salga cara. Lo mismo si lanzamos un dado, ¡o que saquemos nueve habas rojas del montón de habas que estamos pelando!

Para poder calcular estas probabilidades, necesitamos conocer e identificar algunos conceptos bastante sencillos, como el espacio muestral o el evento. Reconozcamos algunos de ellos.

*Imagen tomada de: Ayuntamiento de Palencia, España.*



#### EXPERIMENTO ALEATORIO: E

En el ámbito de las probabilidades, un experimento aleatorio es realizar o ejecutar un proceso cuyo resultado no es conocido, pues depende del azar. Por ejemplo, lanzar una moneda, realizar un sorteo, apostar el resultado de un partido de fútbol, etcétera, son experimentos aleatorios.

Por ejemplo:

- $E_1$ : lanzar una moneda y anotar el resultado.
- $E_2$ : lanzar una moneda dos veces y anotar los resultados.
- $E_3$ : lanzar un dado y observar el resultado.

#### ESPACIO MUESTRAL: $\Omega$

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar el experimento aleatorio. En los experimentos aleatorios anteriores, serían:

$E_1$ : lanzar una moneda y anotar el resultado. Entonces, su espacio muestral será:

$\Omega_1 = \{C, S\}$  (*C significa que obtienes “cara”, y S, “sello”*).

$E_2$ : lanzar una moneda dos veces y anotar los resultados. Entonces, su espacio muestral será:

$\Omega_2 = \{CC, CS, SC, SS\}$

$E_3$ : lanzar un dado y observar el resultado. Entonces, su espacio muestral será:

$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (*porque el dado tiene seis caras y en cada una hay una de esas cantidades*).

#### EVENTO: A

Un evento es una parte o un subconjunto del espacio muestral. Así, por ejemplo:

En el experimento  $E_1$ , si sale cara, el evento será:  $A_1: \{C\}$

En el experimento  $E_2$ , si salen dos sellos, el evento será:  $A_2: \{SS\}$   
En el experimento  $E_3$ , si sale un número par, el evento será:  $A_3: \{2, 4, 6\}$

Con estos conceptos, finalmente, podemos calcular la probabilidad de que ocurra un evento.

### PROBABILIDAD: $P(A)$

Denotamos la probabilidad de que ocurra un evento como  $P(A)$  y la definimos como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Donde:

$n(A)$ : cantidad o número de eventos (eventos favorables o los que queremos que salgan).

$n(\Omega)$ : número total del espacio muestral (los casos posibles).

**Como podemos ver, la probabilidad se define como el número de casos favorables dividido entre los casos posibles.**

¿Te animas a ver unos ejemplos para profundizar en estos conceptos?  
¡Recuerda que, más que memorizar fórmulas, debes tratar de comprender por qué se realizan las operaciones que mostramos!



**Ejemplo 11.** Calcular la probabilidad de que, al lanzar un dado, salga 6.

#### ¿Cómo se hace?

Aquí tenemos:

$\Omega: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; entonces:  $n(\Omega) = 6$

$A: \{6\}$ ; entonces:  $n(A) = 1$

Calculando la probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} = 0,166. \text{ Luego, la probabilidad de que salga 6 es } 1/6.$$

**Ejemplo 12.** Calcular la probabilidad de que, al lanzar una moneda tres veces, nos salgan dos caras.

#### ¿Cómo se hace?

El espacio muestral de todos los resultados posibles, será:

$\Omega: \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$

Entonces,  $n(\Omega) = 8$

De otro lado,  $A: \{CCC, CCS, CSC, SCC\}$ ; entonces:  $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0,5$$

El siguiente ejemplo te mostrará cómo nuevas herramientas matemáticas te pueden ayudar a entender más ampliamente el mundo de las probabilidades.

**Ejemplo 13.** Se ha guardado en el depósito 12 costales de habas del mismo color, de los cuales 4 son de primera calidad. Unos días después, Roberto saca 2 costales de habas, ¡pero no sabe dónde están colocados los de primera calidad! ¿Cuál es la probabilidad de que los dos costales que saque del depósito sean de primera calidad?

### ¿Cómo se hace?

Para calcular esta probabilidad necesitamos encontrar tanto el espacio muestral como los casos favorables de este evento (que Roberto saque los costales que le interesan).

Entonces, ¿cómo proceder?

Tenemos 12 costales, y Roberto va a sacar 2. No tenemos idea de cuáles elegirá, pero sí podemos calcular todas las posibles formas de sacar 2 de 12 costales. La herramienta que vamos a utilizar se llama **combinación**. Entonces vamos a combinar 2 de 12. Así:

$$C_2^{12} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = \frac{132}{2} = 66$$

Esto significa que  $n(\Omega) = 66$  son todas las formas que existen de sacar 2 costales de 12.

De otro lado, para determinar el número de casos favorables para Roberto —es decir, que saque 2 costales de primera calidad de los 4 que hay en el depósito— también calculamos de la misma manera, es decir, combinamos 2 de 4.

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

De manera similar, esto significa que  $n(A) = 6$  son todas las formas que existen de sacar 2 costales de 4.

Con estos valores, calculamos finalmente la probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11} = 0,090$$

Entonces, la probabilidad de que Roberto saque los costales de haba de primera calidad es de 0.090.

Por otro lado, necesitamos conocer algunos **axiomas** o reglas de la teoría de probabilidades:

1. La probabilidad máxima es uno:  $P(\Omega) = 1$   
(Es como si nos compráramos todos los talonarios de la rifa, de modo que aseguramos que ganaremos el premio.)
2. La probabilidad de un evento imposible es cero:  $P(A) = 0$

Por esto, cuando calculamos la probabilidad de cualquier evento, está entre 0 y 1; es decir:  $0 < P(A) < 1$ . Si el número es muy pequeño, es poco probable; y si el número se acerca a 1, es más probable.

También se puede hacer **álgebra de las probabilidades**. A continuación verás un ejemplo de este ámbito de las matemáticas.

**Ejemplo 14.** La probabilidad de que un estudiante apruebe Sociales es de  $2/3$ , y la probabilidad de que apruebe Matemáticas es  $4/9$ . Si la probabilidad de aprobar al menos una de estas materias es  $4/5$ , ¿cuál es la probabilidad de que apruebe ambos cursos?

### ¿Cómo se hace?

Como ves, tenemos dos eventos con sus probabilidades de ocurrencia:

A: el estudiante aprueba Sociales. Además, el enunciado dice que  $P(A) = 2/3$ .

B: el estudiante aprueba Matemáticas. Y nos dicen que  $P(B) = 4/9$ .

También tenemos el evento en el que suceden las dos cosas simultáneamente (es decir, aprueba al menos un curso), que expresaríamos así:  $A \cup B$ . Además, el enunciado nos dice que  $P(A \cup B) = 4/5$  son eventos que se pueden dar, es decir, que no son mutuamente excluyentes.

Para resolver este tipo de situaciones utilizamos un teorema de la probabilidad que se expresa como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aprobar ambos significa que los dos eventos se tienen que dar simultáneamente, lo que se expresa como  $P(A \cap B)$ , que es precisamente lo que queremos averiguar:  $P(A \cap B) = ?$

Luego, aplicando el teorema, tendremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Despejando el evento simultáneo:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Ahora reemplacemos sus valores de probabilidad:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}$$

Luego, la probabilidad de que apruebe ambas materias es de  $14/45 = 0,311$ .

¿Se ve un poco complicado?

¡No te preocupes: vamos a unos ejercicios sencillos para verificar lo que has comprendido!



## Verificamos lo comprendido

Ahora que conoces sobre las probabilidades, realicemos algunos ejercicios.

### EJERCICIO DE AFIANZAMIENTO

- 1 Escribe tres ejemplos de experimentos aleatorios; luego, determina su espacio muestral. (Respuesta libre; revisa el texto 6 para ver ejemplos)
- 2 Si lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara par? (Respuesta: 0,5)
- 3 Jaime desea realizar un viaje. La probabilidad de que viaje a Puno es de 0,25, y la probabilidad de que viaje a Abancay es de 0,10. ¿Cuál es la probabilidad de que viaje a Puno o a Abancay? (Respuesta: 0,35. Advertencia:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  son eventos mutuamente excluyentes; por esto,  $P(A \cap B) = 0$ )

## ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces nueva información, es momento de ver de qué manera podrías utilizarla para explicar lo que sucede en tu localidad o en tu experiencia.

Recuerda que puedes revisar, cada vez que sea necesario, los textos que has leído previamente. ¡Y a veces vale la pena realizar los ejercicios con ayuda de algún compañero o compañera!



### EJERCICIO DE APLICACIÓN

- Para mejorar la carretera del sector, la comunidad ha realizado un análisis de los costos por alquiler de maquinaria pesada (por hora de trabajo). La cotización en toda la provincia arrojó los siguientes datos. **Completa la tabla de frecuencias y representa gráficamente** estos datos. ¿Qué puedes decir de la información que presentan estos datos? Escribe un párrafo con tu descripción.

| i | Costo de alquiler (en soles) | Número de servicios $f_i$ | $h_i$ | % | $H_i$ |
|---|------------------------------|---------------------------|-------|---|-------|
| 1 | 150                          | 2                         |       |   |       |
| 2 | 160                          | 2                         |       |   |       |
| 3 | 165                          | 1                         |       |   |       |
| 4 | 170                          | 4                         |       |   |       |
| 5 | 180                          | 2                         |       |   |       |
| 6 | 190                          | 6                         |       |   |       |
| 7 | 200                          | 2                         |       |   |       |
| 8 | 220                          | 1                         |       |   |       |

- Completar la siguiente tabla de frecuencias.

| i | X: Edad | $f_i$ | $h_i$ | %    | $H_i$ |
|---|---------|-------|-------|------|-------|
| 1 | 8       |       |       | 12,5 |       |
| 2 | 9       |       |       | 12,5 |       |
| 3 | 10      |       |       |      | 10    |
| 4 | 12      |       |       |      | 18    |
| 5 | 13      |       |       |      |       |
|   |         | 24    |       | 100  |       |

- Al lanzar un dado, ¿qué probabilidad existen de obtener un número impar? *(Ten en cuenta que hay seis caras en un dado; ¿cuántos son números pares y cuántos impares?)*
- En una caja hay 3 bolas azules, 2 rojas y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja al primer intento? *(Revisa el texto 6 y los ejemplos del 11 al 14)*
- En una rifa, la probabilidad de ganar el primer premio es de 0,4; la de ganar el segundo premio, 0,35; y la probabilidad de ganar al menos uno de los premios, 0,7. Hallar la probabilidad de ganar ambos premios. *(Revisa el texto 6 y los ejemplos 11 al 14)*

### ACTIVIDAD FINAL

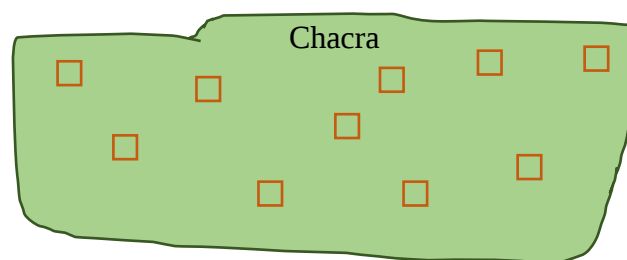
Vas a elaborar una tabla de frecuencias para determinar y analizar la **estadística de la producción de la chacra familiar**.

Para esto, en la siguiente cosecha de algún producto (puede ser hortalizas, granos o tubérculos: nosotros elegimos según la temporada) vamos a elegir unas 10 muestras en diferentes partes de nuestra chacra, de un metro

cuadrado, para luego pesar el producto que cosechamos en ese metro. ¡Prepara tu tabla de frecuencias con esos datos! **¡Revisa el ejemplo 4, el de la producción de habas!**

Con esos datos vas a construir tu propia **tabla de frecuencias**. Luego, **representa gráficamente** los datos de la producción. **¡Toma como guía el ejemplo 2!**

- ¿Qué puedes afirmar sobre la productividad de la chacra? ¿Puedes citar los datos que has obtenido para sustentar tus afirmaciones?



## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:

**Lo aprendido:** ¿Qué sé ahora que no sabía antes? ¿Qué cosas necesito explorar más y qué dudas me quedan? ¿Lo que he visto tiene relación con experiencias de mi vida cotidiana? ¿He logrado resolver el reto para evaluar la productividad de la chacra familiar? ¿Qué fue lo más fácil y qué fue lo más complicado de este reto?

**El proceso:** ¿Fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Qué recursos utilicé para aprender y a quiénes recurrí para aprender más? ¿A qué compañeros o compañeras puedo acudir cuando tengo dificultades para comprender conceptos de matemáticas?



### SOLUCIONARIO

#### Ejercicios de aplicación

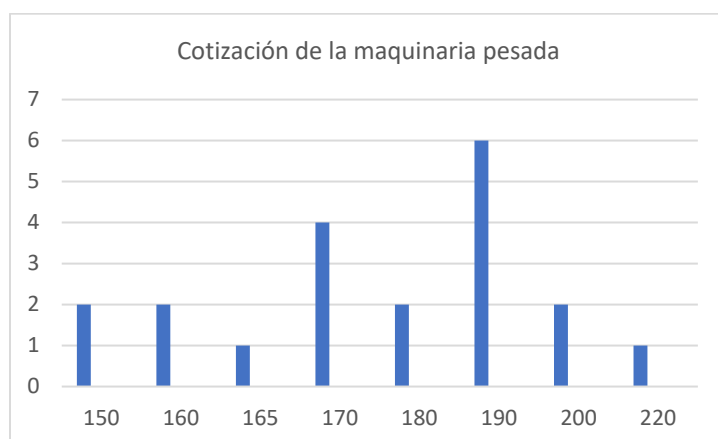
1. Para mejorar la carretera del sector, la comunidad ha realizado un análisis de los costos por alquiler de maquinaria pesada (por hora de trabajo). La cotización en toda la provincia arrojó los siguientes datos. Completa la tabla de frecuencias y representa gráficamente estos datos. ¿Qué puedes decir de la información que presentan estos datos?

**Solución**

$n = 20$

Con este valor calculamos las frecuencias relativas para cada dato y completamos la tabla.

| I | Costo<br>alquiler<br>(soles) | Número<br>de servicios<br>$f_i$ | $h_i$ | %  | $H_i$ |
|---|------------------------------|---------------------------------|-------|----|-------|
| 1 | 150                          | 2                               | 0,1   | 10 | 2     |
| 2 | 160                          | 2                               | 0,1   | 10 | 4     |
| 3 | 165                          | 1                               | 0,05  | 5  | 5     |
| 4 | 170                          | 4                               | 0,2   | 20 | 9     |
| 5 | 180                          | 2                               | 0,1   | 10 | 11    |
| 6 | 190                          | 6                               | 0,3   | 30 | 17    |
| 7 | 200                          | 2                               | 0,1   | 10 | 19    |
| 8 | 220                          | 1                               | 0,1   | 10 | 20    |



Como se puede ver, la mayor parte de los que prestan este servicio en la provincia cobran alrededor de 190 soles la hora.

## 2. Completar la tabla

Solución:

| i | X: edad | f <sub>i</sub> | h <sub>i</sub> | %     | H <sub>i</sub> |
|---|---------|----------------|----------------|-------|----------------|
| 1 | 8       | 3              | 0,125          | 12,5  | 3              |
| 2 | 9       | 3              | 0,125          | 12,5  | 6              |
| 3 | 10      | 4              | 0,166          | 16,66 | 10             |
| 4 | 12      | 8              | 0,33           | 33,33 | 18             |
| 5 | 13      | 6              | 0,25           | 25    | 24             |
|   |         | 24             |                | 100   |                |

Para completar la tabla necesitamos recordar que:

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

También, cómo conseguimos la frecuencia acumulada.

Entonces, como tenemos 12,5 %, significa que  $h_1 = 0,125$  y  $f_1 = 3$  (de la fórmula y, además, como es el inicio, la frecuencia acumulada es la misma). Si  $h_2 = 0,125$ ,  $f_2 = 3$ . Y también podemos determinar la frecuencia acumulada:  $H_2 = 6$  ( $3 + 3 = 6$ ).

De aquí, si  $H_3 = 10$ , significa necesariamente que  $f_3 = 4$  (porque  $4 + 6 = 10$ ).

A partir de aquí resulta más simple completar. Si  $H_4 = 18$ ,  $f_4 = 8$  (ya que  $18 - 10 = 8$ ). Y, finalmente, como el ultimo valor de  $H_5$  coincide con el tamaño de la muestra, entonces  $H_5 = 24$ , lo que implica que  $f_5 = 6$  ( $24 - 18 = 6$ ). De aquí podemos calcular las diferentes frecuencias relativas y completar la tabla.

## 3. Al lanzar un dado, ¿qué probabilidad existe de obtener un número impar?

Solución

$\Omega$ : {1, 2, 3, 4, 5, 6}; entonces:  $n(\Omega) = 6$

A: que salga Impar: A: {1, 3, 5,}; entonces:  $n(A) = 3$

$$\text{Luego: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0,5$$

## 4. En una caja hay 3 bolas azules, 2 rojas y una negra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja al primer intento?

Solución

Este es un experimento aleatorio que consiste en sacar una bola de la caja y observar su color.

El espacio muestral asociado a este experimento será:

Si R: roja, A: azul, N: negra, entonces  $\Omega = \{A, A, A, R, R, N\}$ ; entonces:  $n(\Omega) = 6$

Y el evento que buscamos es sacar una bola roja; entonces  $n(R) = 2$ .

Luego hallamos la probabilidad.

$$P(A) = \frac{n(R)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

## 5. En una rifa, la probabilidad de ganar el primer premio es de 0,4; la de ganar el segundo premio, 0,35; y la de ganar al menos uno de los premios, 0,7. Hallar la probabilidad de ganar ambos premios.

Solución

Si: A: el primer premio; entonces:  $P(A) = 0,4$

B: el segundo premio; entonces:  $P(B) = 0,35$

AUB: al menos uno de ellos; entonces:  $P(A \cup B) = 0,7$

De otro lado,  $P(A \cap B) = ?$  (la probabilidad de ganar ambos premios).

Entonces, aplicando el teorema  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , despejamos y reemplazamos:

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,35 - 0,7 = 0,05$$

Unidad de Aprendizaje N.º 4

# ¡Construyo un concentrador solar!

| Área       | Duración                                     |
|------------|----------------------------------------------|
| Matemática | 4 semanas: del 2 al 27 de noviembre del 2020 |

## ¿Qué vamos a aprender?

Estimada y estimado estudiante:

Esta experiencia de aprendizaje te permitirá desarrollar las competencias y capacidades que aparecen en la siguiente tabla. Revisa los desempeños, pues son conductas verificables que debes poder realizar al terminar esta experiencia.



**Ejes:** Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos / Soberanía alimentaria y productiva.

| COMPETENCIAS                                                                                                         | CAPACIDADES                                                                                                                                                                                                                                                            | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.<br>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. | Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.<br>Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.<br>Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.<br>Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas. | Resuelve problemas en los que modela características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. |
| <b>GEOMETRÍA ANALÍTICA.</b> Ecuaciones de la circunferencia, la elipse y la parábola.                                |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

## “Esto es importante porque...”

La energía solar es abundante y podemos aprovecharla de maneras muy prácticas. Por ejemplo, el 2019, en la pampa de Anta, comunidad de Haparquilla, hicimos *wathia* en un horno solar cilíndrico, ¡sin utilizar leña, y en pocos minutos!

¿Sabías que el Sol (*Taytainti*) diariamente nos regala 1000 vatios (1000 W) de energía por metro cuadrado? ¡Con esta energía podríamos prender 10 focos de 100 vatios, o 40 focos de 25W! Es por esta razón que en muchos





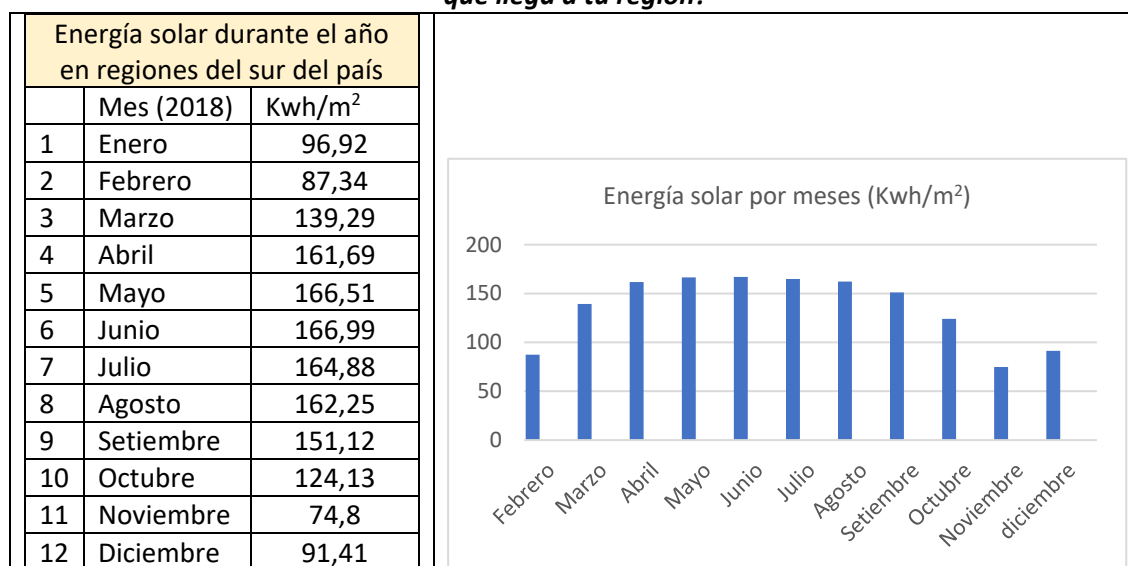
lugares del mundo el uso de la energía solar se está desarrollando, especialmente allí donde la radiación anual es ideal. ¡Y nuestra región andina es una de ellas!

Además, la radiación en las zonas de la sierra es muy elevada durante el día, es gratuita y no contamina.

A continuación puedes ver datos estadísticos que muestran la energía disponible durante el año en las zonas del sur del país.

**Imagen 1: Wathia (huatia) tradicional con leña. / Imagen 2: Instalación de cocinas y termas solares en Cusco.**  
Imágenes tomadas de "Hospedaje casa de Tayra", Cusco / Fundación Social Universal (FSU).

**¿Has visto en qué época del año hay más radiación solar y se incrementa la energía solar que llega a tu región?**



Como puedes apreciar, si bien existen días nublados o temporadas de lluvia en nuestra región, también hay días despejados, en los cuales podemos aprovechar la energía del *Taytainti*. ¿Te animarías a intentarlo? ¿Será que se necesita muchos conocimientos matemáticos para lograrlo? ¿Habrá forma de usar la matemática para lograr que la energía se concentre y no se refleje en diferentes direcciones y “se pierda”?

**Tu reto:** Construye un **concentrador solar**. ¡Pero primero necesitas conocer algunos **conceptos matemáticos**! Para esto comenzaremos repasando algunas ecuaciones de las denominadas secciones cónicas que se estudian en la geometría analítica, y luego, con esa experiencia, ¡resolverás el **desafío**!



## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

### Actividad 1: Lo que sabemos...



Ilustración de Gustavo Damiani para <https://cdn.educ.ar/>

¡Seguramente has jugado vóley alguna vez, o al menos lo has visto jugar!

**Observa** el dibujo de la izquierda, en el que se ha planeado una estrategia para aprender a jugarlo...

- ¿Cómo describirías el movimiento que hace la pelota cuando se producen el saque, la recepción, el boleo y el mate? ¿La pelota sigue **trayectorias similares**?
  - Si lanzas la pelota hacia arriba y hace una “curva cerrada” antes de caer, ¿ese movimiento es el mismo que si se la lanzas a alguien que está lejos de ti? ¿Podrías dibujar cómo se verían esas trayectorias?
- ¿Has escuchado los términos elipse y parábola para referirse a formas o movimientos de algo? ¿Puedes contar en qué contexto escuchaste esas palabras?

## Exploramos la temática

Como ves, hay algunas cosas que sabes sobre la temática que estamos trabajando. Ahora vas a tener la oportunidad de ampliar esa información utilizando textos informativos.



**Léelos** con cuidado y **señala o subraya las ideas más importantes**. Si lo prefieres, **anota al margen palabras clave** que te ayuden a recordar lo que dice el texto.

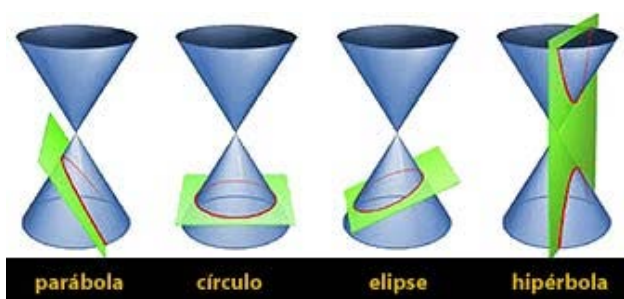
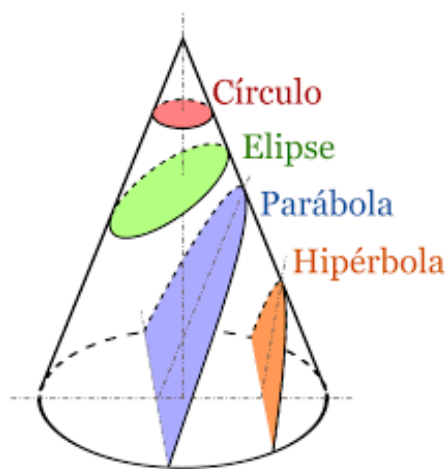
### Actividad 2: Las secciones cónicas

Imagina un cono al que le haces unos cortes transversales con una plancha de metal. Lo que queda se llaman **secciones cónicas**. ¡Y las superficies cortadas tendrán la forma de figuras como el **círculo**, la **elipse**, la **parábola** y la **hipérbola**! ¡Tal como ves en las imágenes del lado derecho!

Una extraordinaria mujer, llamada Hipatia, (370 d. C.), que fue además la directora de la biblioteca de Alejandría, estudió las cónicas de trabajo de personas anteriores a ella y las amplió para escribir un tratado sobre “Las cónicas de Apolonio”, poniéndolas en relieve.

Después de Hipatia, las cónicas se dejaron de lado por casi 1000 años, hasta que la ingeniería y la ciencia volvieron a descubrir sus aplicaciones prácticas.

Estas **formas geométricas** las podemos representar en un **sistema coordenado** a través de sus **ecuaciones matemáticas**. ¡Veamos a continuación algunas de ellas!



## Texto 1

### ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Todos conocemos una circunferencia y, además, sabemos cómo trazarla: ponemos un punto fijo y hacemos girar un compás o una cuerda en torno a este punto. En matemáticas definimos la circunferencia como “el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro”.

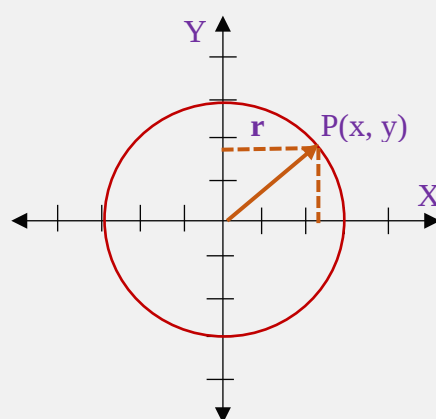
**Ejemplo 1.** Construyamos un sistema coordenado “XY” y luego, sobre este, tracemos un círculo con su centro en el origen y 3 centímetros de radio.

Como podemos apreciar en el esquema, tenemos una circunferencia de radio “r” de 3 cm (que es de valor constante). Además, en un punto cualquiera sobre la circunferencia hay un punto “p” cuyas coordenadas son el punto (x, y). Esta circunferencia tiene una ecuación para cualquier punto (x, y) sobre la circunferencia, que se escribe como:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Veamos algunos puntos en la tabla para esta circunferencia.

| P(x, y)                     | x    | y      | $x^2 + y^2 =$ | $r^2$ | r   |
|-----------------------------|------|--------|---------------|-------|-----|
| P <sub>1</sub> (0, 3)       | 0    | 3      | 0 + 9         | 9     | 3   |
| P <sub>2</sub> (0,5, 3)     | 0,5  | 2,958  | 0,25 + 8,75   | 9     | 3   |
| P <sub>3</sub> (1, 2,828)   | 1    | 2,828  | 1 + 8         | 9     | 3   |
| P <sub>4</sub> (2, 2,236)   | 2    | 2,236  | 4 + 5         | 9     | 3   |
| P <sub>5</sub> (3, 0)       | 3    | 0      | 9 + 0         | 9     | 3   |
| P <sub>6</sub> (-2, 2,236)  | -2   | 2,236  | 4 + 5         | 9     | 3   |
| P <sub>7</sub> (-2, -2,236) | -2   | -2,236 | 4 + 5         | 9     | 3   |
| P <sub>8</sub> (0, -3)      | 0    | -3     | 0 + 9         | 9     | 3   |
| ....                        | .... | ....   | .....         | ...   | ... |



Como podemos apreciar, esta circunferencia ( $r^2 = x^2 + y^2$ ) está en el centro, pero puede estar en cualquier otro punto del sistema cartesiano.

**Ejemplo 2.** Si ubicamos el punto (-4, 1) y trazamos esta misma circunferencia, tendremos el esquema que ves a la derecha. Y la ecuación de la circunferencia también cambia. Ahora su forma contiene los puntos de su centro:

C (-4, 1); así:  $r^2 = (x + 4)^2 + (y - 1)^2$

De manera general, si el centro es el punto c (h, k), donde h y k son cualquier número real, entonces la ecuación de la circunferencia (que además se llama ECUACIÓN CANÓNICA DE LA CIRCUNFERENCIA) será:  $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Como podrás ver, si el centro es el origen, entonces (h, k) = (0, 0), y la ecuación es la del inicio:  $r^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2$

**NOTA:** Existe otra forma de la ecuación de la circunferencia que se denomina **ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA**. Para encontrarla solo tenemos que desarrollar las operaciones indicadas de la forma canónica (el binomio del cuadrado). Así, del ejemplo anterior:

$$r^2 = (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + 2(x)(4) + (4)^2 + y^2 + 2(y)(-1) + (-1)^2 = x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17$$

Ordenando, tendremos la ecuación general:  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 - r^2 = 0$

Y, de forma general: la ecuación canónica:  $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

la expresamos en la ecuación general:  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ,

donde:  $D = -2h$ ;  $E = -2k$ ; y  $F = h^2 + k^2 - r^2$

Si lo deseamos, podemos verificar para nuestro ejemplo anterior:

$$D = -2h = -2(-4) = 8. \quad E = -2k = -2(1) = -2. \quad F = (-4)^2 + 1^2 - r^2 = 16 + 1 - r^2 = 17 - r^2$$

Luego, la ecuación será:  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 - r^2 = 0$

**Ejemplo 3.** Escribamos la ecuación canónica y general de una circunferencia de radio  $r = 3$  en el punto C  $(-2, 3)$ .

**¿Cómo se hace?**

La ecuación canónica será:  $r^2 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ , con:  $r = 3$

Y para la ecuación general, encontrando los términos, tendremos:

$$D = -2h = -2(-2) = 4. \quad E = -2k = -2(3) = -6. \quad F = (-2)^2 + 3^2 - r^2 = 4 + 9 - r^2 = 13 - r^2$$

Luego podemos escribir la ecuación:  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - r^2 = 0$

**NOTA:** En la ecuación  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - r^2 = 0$ , pues el radio es 3. Reemplazando el valor del radio en la ecuación de la circunferencia, tendremos:

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 3^2 = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 9 = x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4$ , que es su forma equivalente.

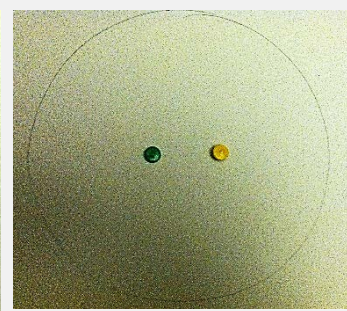
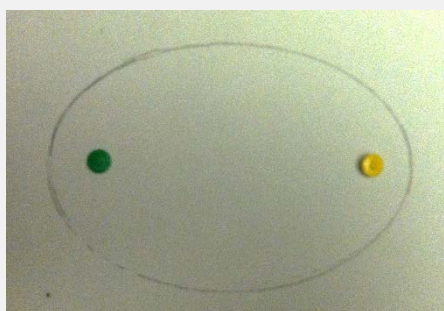
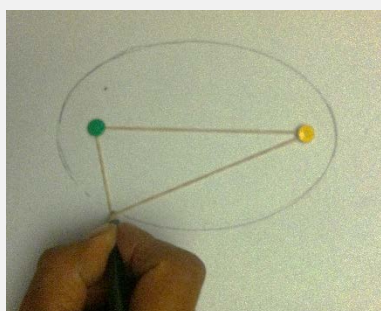
## Texto 2

### ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Así como trazar una circunferencia es bastante sencillo, trazar una elipse también lo es. Solo hay que tomar dos centros. Cuanto más alejados estén, más pronunciada será la elipse; y cuanto más cerca estén más se parecerán a una circunferencia.

Si tenemos dos puntos,  $f_1$  y  $f_2$ , llamados focos, se denomina **elipse** al “conjunto de puntos del plano tales que la suma de las distancias de cualquier punto  $p(x, y)$  hacia los focos es constante”.

En efecto, para trazar una elipse sobre una superficie ponemos dos centros (que se denominan “focos de la elipse”). Luego tomamos una cuerda y la anudamos en un lazo cerrado. Después colocamos entre los ejes (observa en las fotos que se utilizaron dos chinchetas fijas a un triplay sobre el que se puso un papel) y trazamos, con ayuda de esta cuerda y un lápiz... ¡y obtenemos la elipse!



La **ecuación de la elipse**, para un punto cualquiera  $P(x, y)$ , es la siguiente:

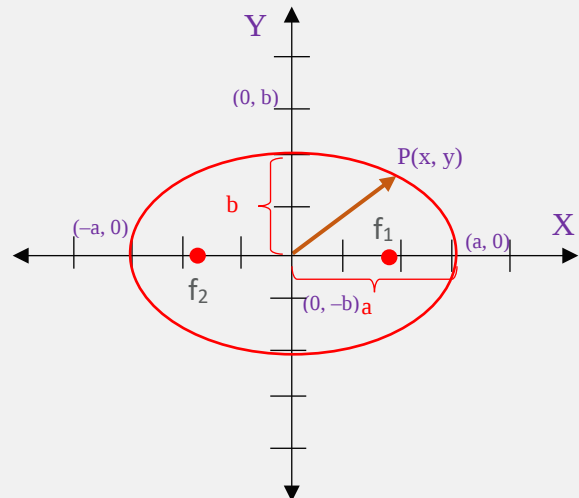
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde:  $a$  es la distancia del centro al vértice de la elipse en el eje  $X$  (y se le denomina semieje mayor), y " $b$ " es la distancia del centro al vértice de la elipse en el eje  $Y$  (y se le denomina semieje menor).

**OJO:** Si  $a = b$ , la elipse se reduce a una circunferencia.

También el punto que une los focos se denomina eje focal.

Si  $a > b$ , el eje focal está en la dirección del eje  $X$ . Si  $a < b$ , el eje focal está en la dirección del eje  $Y$ .

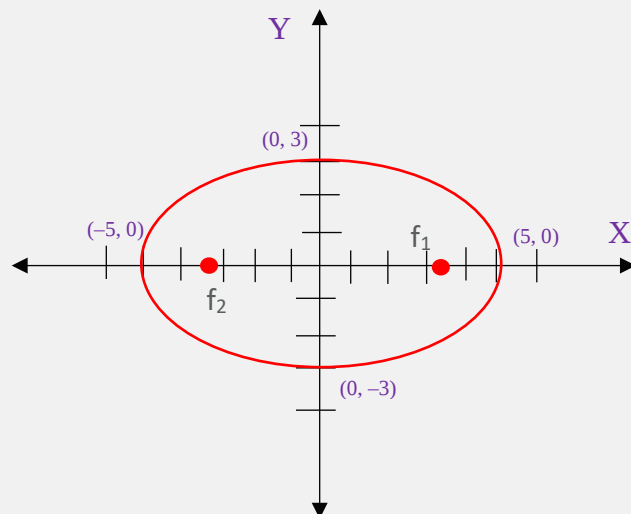


**Ejemplo 4.** Determinamos la ecuación canónica para la elipse cuyos vértices son: (5, 0) y (0, 3).

**¿Cómo se hace?**

De acuerdo con los puntos de los vértices, tenemos:  $a = 5$  y  $b = 3$ .  
Entonces, escribiendo la ecuación tendremos:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



**Ejemplo 5.** Determinar los focos de la elipse anterior.

**¿Cómo se hace?**

Para determinar los focos utilizamos una propiedad de la elipse a partir de su ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ Se cumple que: } a^2 = b^2 + c^2$$

Entonces, aplicando esta relación:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1. \text{ Tendremos: } 5^2 = 3^2 + c^2$$

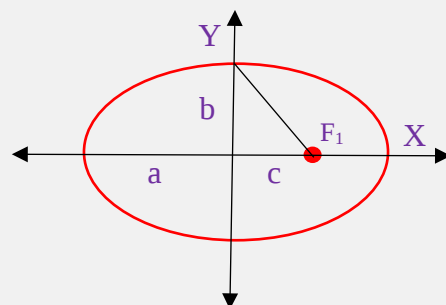
$$25 = 9 + c^2$$

Despejando  $c$ :  $c^2 = 25 - 9 = 16$ ,  $c = \sqrt{16}$

Entonces,  $c = 4$  y  $c = -4$

*(Recordemos que la raíz cuadrada siempre tiene dos valores: uno positivo y otro negativo)*

Entonces, los focos de esta elipse serán:  $f_1 = (4, 0)$ , y  $f_2 = (-4, 0)$



**Ejemplo 6.** Determinar la excentricidad de la elipse anterior.

**¿Cómo se hace?**

La excentricidad, “e”, es un parámetro que mide cuán “alargada” es la elipse (si tiene poca excentricidad, es decir, un valor pequeño, entonces se parece cada vez más a una circunferencia).

Calcular la excentricidad “e” de la elipse es bastante sencillo. Utilizamos la relación:  $e = \frac{c}{a}$

donde “c” es la distancia al foco y “a” es el semieje mayor.

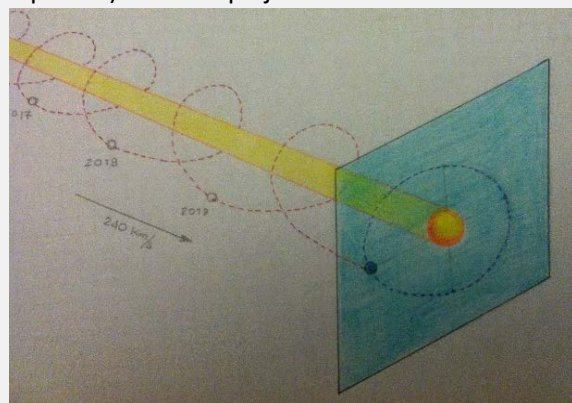
Entonces, para la elipse anterior:  $c = 4$ ;  $a = 5$ . Remplazando, tendremos:

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$ . Esta ecuación representa una elipse bastante alargada.

**Ejemplo 7.** Calculemos la excentricidad de la órbita de nuestro planeta.

**¿Cómo se hace?**

Como sabemos, el Sol se mueve a una velocidad increíble de 270 km/s, y todos los planetas se mueven con el Sol a esta misma velocidad, por lo que sus trayectorias helicoidales (similares a espirales) son complejas. Si hacemos un corte transversal con un plano a esta trayectoria, resulta



una buena aproximación la forma de una elipse que describe la aparente órbita del planeta alrededor del Sol (como en el esquema que se muestra a la izquierda).

Sabemos, por mediciones indirectas que se han realizado, que el punto más alejado entre la Tierra y el Sol es el afelio. En ese momento nuestro planeta está aproximadamente a 152 millones de kilómetros del Sol. El punto más cercano es el perihelio, ubicado a aproximadamente 147 millones de kilómetros.

Con estos valores calcularemos la **excentricidad**

de la órbita aparente de la Tierra.

A partir del esquema, podemos encontrar los valores de “a” y “c”. Si sumamos el perihelio más el afelio, tendremos la longitud entre los vértices de la elipse, es decir:

$$152 + 147 = 299$$

Luego, si dividimos esta cantidad, tendremos el valor de “a”, es decir:  $a = 149,5$

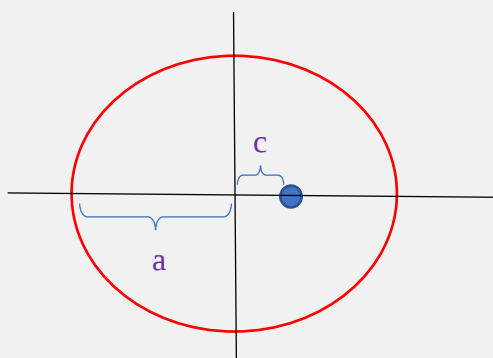
De otro lado, “c” es la distancia focal, y la podemos encontrar restando del perihelio, así:

$$C = 149,5 - 147 = 2,5$$

Con estos valores calculamos la excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2,5}{149,5} = 0,016722$$

Es decir, la excentricidad de nuestro planeta es mínima.



**Ejemplo 8.** Determinar la ecuación general de la elipse.  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

**¿Cómo se hace?**

Para expresar la ecuación general a partir de la ecuación canónica de la elipse realizamos la siguiente operación:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Multiplicamos la ecuación por 25 (¡para “desaparecer” el denominador 25!)

Resulta:  $x^2 + 25 \cdot \frac{y^2}{9} = 25$

Ahora multiplicamos toda la ecuación por 9 (¡y “desaparece” el 9!)

Así, resulta:  $9x^2 + 25y^2 = 16 \cdot 25 = 400$

De aquí tendremos la ecuación general de la elipse:

$$9x^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

**NOTA:** Como en el caso de la circunferencia, el centro de la elipse puede estar en cualquier punto  $(h, k)$  del plano cartesiano. Con este punto, la ecuación canónica será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

## Verificamos lo comprendido

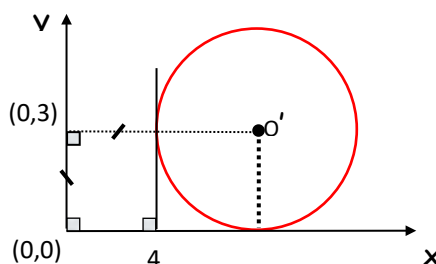
Ahora, **resolvamos** algunos ejercicios usando los textos 1 y 2 que acabas de leer.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

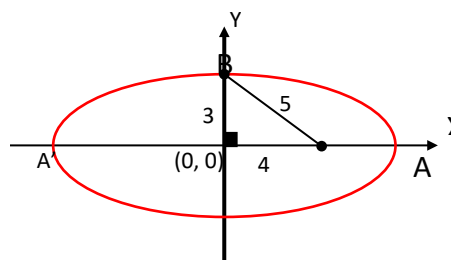
**Resuelve** los cuatro ejercicios usando la información previa.

- 1 Si una circunferencia de 4 cm de radio tiene su centro en el punto  $(1, 2)$ , encontrar su ecuación general. *(Revisa el ejemplo 3 para guiarte.)*

- 2 A partir de la figura que ves a la derecha, escribe la ecuación de la circunferencia.



- 3 A partir del esquema que ves a continuación, escribe la ecuación canónica de la elipse *(Revisa el ejemplo 4 para guiarte.)*



- 4 La excentricidad de la órbita del planeta Marte es 0,0934, y su semieje mayor es de 227,9 millones de kilómetros. Encuentra el valor del semieje menor. *(Respuesta: 226,9) (Revisa los ejemplos 6 y 7 para guiarte.)*

Ahora vas a revisar un último texto informativo sobre las parábolas matemáticas.

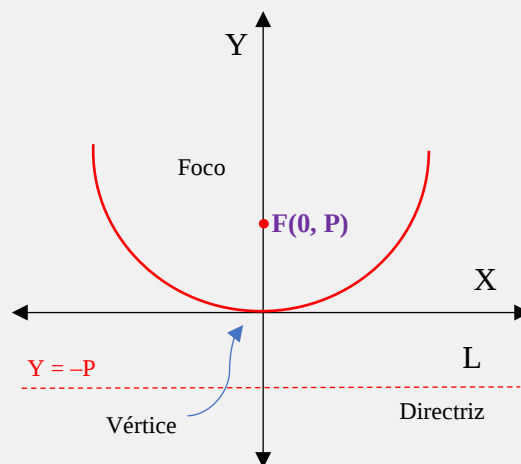
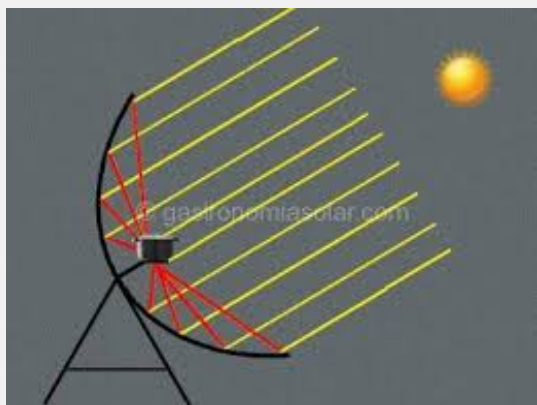
**Léelo** con cuidado y **señala o subraya las ideas más importantes**. Si lo prefieres, **anota al margen palabras clave** que te ayuden a recordar lo que dice el texto.

### Texto 3

#### ECUACION DE LA PARÁBOLA

Una parábola es un conjunto de todos los puntos  $p(x, y)$  en el plano que equidistan de una línea fija  $L$  llamada **directriz** y un punto fijo  $F$  llamado **foco**.

Por sus características geométricas, la parábola tiene una importante aplicación práctica, debido a que si tenemos una superficie parabólica, todos los rayos que inciden sobre esta se reflejan en un solo punto, que es precisamente su foco. Esta cualidad la hace ideal para **recibir o emitir señales** de comunicación (de naturaleza electromagnética). Otra aplicación es, por este mismo principio, para **concentradores solares**, que permiten aprovechar la energía radiante del *Taytainti*.



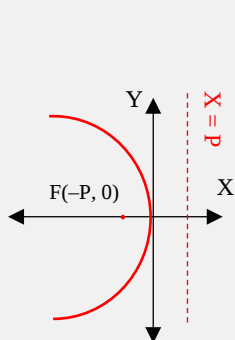
En el esquema puedes observar que el foco está en el punto **(0, P)** y que la directriz es la recta  $Y = -P$ . Ambos están equidistantes del origen.

La ecuación de la parábola es la siguiente:

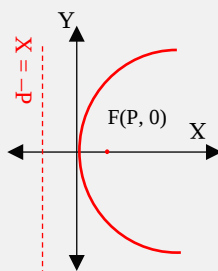
**$X^2 = 4PY$** , si está en el origen

**$(X - h)^2 = 4P(Y - k)$** , si está en el punto  $(h, k)$  del plano. En ambos casos,  $P$  es la distancia del vértice de la parábola al foco.

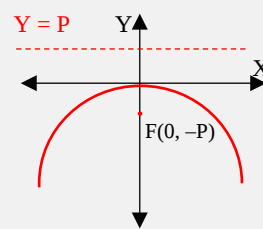
Un aspecto que debemos tener en cuenta es la posición de la gráfica en el sistema coordenado que presenta la parábola, dependiendo de las características que te mostramos:



Aquí la ecuación será de la forma:  $Y^2 = 4PX$ ; y nota que para el foco,  $P < 0$



Aquí la ecuación será de la forma:  $Y^2 = 4PX$ ; y nota que para el foco,  $P > 0$



Aquí la ecuación será de la forma:  $X^2 = 4PY$ ; y nota que para el foco,  $P < 0$

**Ejemplo 9.** Determinar la ecuación de la parábola con directriz en  $x = 2$  y con foco en  $F(-2, 0)$ .

**¿Cómo se hace?**

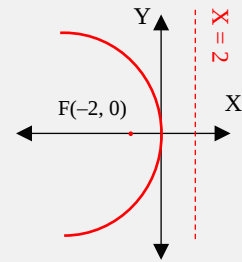
Para determinar la ecuación nos fijamos en el foco. Si vemos desde el vértice, que en este caso coincide con el origen de coordenadas, entonces:  $P = -2$  está en el eje "X" negativo.

Ahora nos fijamos en la directriz,  $L: x = 2$ , lo que significa que es una línea paralela al eje Y. Con estas condiciones la ecuación de la parábola será de la forma:

$$Y^2 = 4PX, \text{ donde } P = -2$$

$$Y^2 = 4(-2)X = -8X$$

Entonces, la parábola  $Y^2 = -8X$  se abre hacia la izquierda, ya que  $P < 0$ .



**Ejemplo 10.** Determinar el foco y la directriz de la parábola que está dada por la ecuación:  $y = x^2$

**¿Cómo se hace?**

Para encontrar estos valores, solo tenemos que comparar la ecuación de esta parábola con la ecuación general (canónica); así:

$$x^2 = 4PY$$

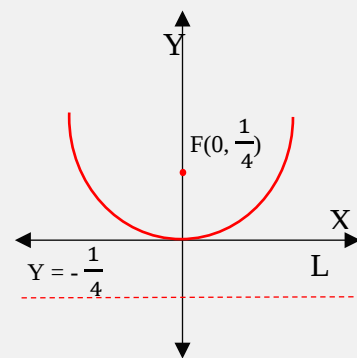
$$x^2 = y$$

Entonces, comparando, tendremos:  $4PY = Y$

De aquí deducimos que  $4P = 1$ ; entonces:  $P = \frac{1}{4}$ , que es el foco.

Además, esta parábola se abre hacia arriba, lo que nos indica la forma de la ecuación). Entonces:  $F(0, \frac{1}{4})$ ; y, por consiguiente,

como el vértice coincide con el origen de coordenadas, la directriz será la recta  $L: y = -\frac{1}{4}$



**Ejemplo 11.** Determinar la ecuación general de la siguiente parábola  $(y - 2)^2 = 8(x + 4)$ .

**¿Cómo se hace?**

Comparando con la ecuación de la parábola con vértice en el punto  $(h, k)$ , tendremos:

$$(y - k)^2 = 4P(x - h)$$

$$(y - 2)^2 = 8(x + 4)$$

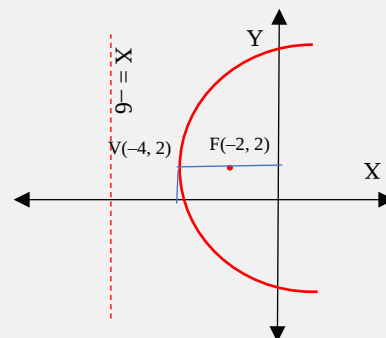
Y así tendremos que el vértice es el punto  $(h, k) = (-4, 2)$

También  $4P = 8$ ; entonces,  $P = 2$ . ( $P > 0$ ) significa que se

abre a la derecha y su vértice está en el punto  $(-4, 2)$ ;

su foco estará en el punto  $(-2, 2)$ , y su bisectriz en la recta

$x = -6$  (recordemos que la bisectriz es equidistante del vértice y del foco, es decir, ambos tienen la misma longitud).



Ahora, para conseguir la forma general de parábola, como antes, solo tenemos que desarrollar las operaciones indicadas; así:

$$(y - 2)^2 = 8(x + 4)$$

$$Y^2 + 2Y(-2) + (-2)^2 = 8x + 32$$

$$Y^2 - 4Y + 4 = 8x + 32$$

De aquí tendremos que:

$Y^2 - 4Y - 8x - 28 = 0$ , y esa es la ecuación general de la parábola.

## Verificamos lo comprendido

Ahora, **resolvamos** algunos ejercicios usando la información del texto 3 que acabas de leer.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- 1 Sea la parábola:  $Y^2 - 4y - 8x - 28 = 0$ . Expresar en forma canónica.  
(Fíjate en los pasos que dimos en la última parte del ejemplo 11. Puedes hacer una reconstrucción inversa.)
- 2 Determina el foco y la directriz de la siguiente parábola:  $4y = 3x^2$   
(Respuesta:  $P = 1/3$ ; ahora determina la directriz y las coordenadas del foco.)
- 3 Determina la ecuación que tiene el foco en  $F(0, 7)$ , y cuya directriz es  $y = -7$   
(Respuesta:  $X^2 = 28y$ )

## ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces algo más sobre las secciones cónicas, ¡estás en posibilidad de construir tu concentrador solar!

Para esto vas a proceder paso a paso.

- Primero diseñarás una ecuación parabólica (en este caso, un cilindro parabólico).
- Segundo, graficarás tu parábola cilíndrica en un papelote o, mejor, sobre una cartulina.
- Tercero, construirás tu superficie parabólica.



### PRIMERO



Concentrador solar 'híbrido'. Imagen tomada de <https://www.cocinas-solares.com/blog/como-funciona/>

Observa la foto para imaginar cómo podría verse tu concentrador de energía solar. Puedes poner el **foco** no muy alejado de la superficie; digamos, a 15 cm del vértice de nuestra parábola. Entonces:  $F(15, 0)$ .

¡Además, haz que coincida con el origen del sistema de coordenadas!

Para ello utiliza una **ecuación** como:  $Y^2 = 4PX$  (para nuestro caso,  $P = 15$ ).

Reemplazando este valor tendremos:

$$Y^2 = 4(15)X = 60X$$

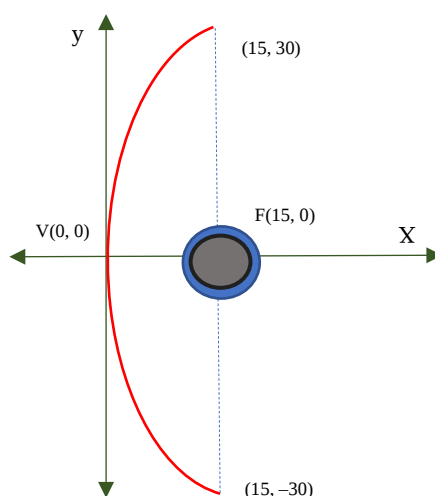
Entonces, tu ecuación será:

$$Y^2 = 60X$$

Ahora te toca asignar valores a  $X$  para obtener los valores de  $Y$  (es decir, que vas a tabular). Considera valores desde 30 centímetros para  $X$ , para que la superficie de la parábola no resulte muy grande.

Observa este ejemplo de la tabla que es necesario construir.

| X   | $Y^2 = 60X$          | Y (+) | Y (-)  |
|-----|----------------------|-------|--------|
| 15  | $Y^2 = 60(15) = 900$ | 30    | -30    |
| 13  | $Y^2 = 60(13) = 780$ | 27,92 | -27,92 |
| 11  | $Y^2 = 60(11) = 660$ | 25,69 | -25,69 |
| 10  | $Y^2 = 60(10) = 600$ | 24,49 | -24,49 |
| ... | ....                 | ....  | ....   |
| 5   | $Y^2 = 60(5) = 300$  | 17,32 | -17,32 |
| 4   | $Y^2 = 60(4) = 240$  | 15,49 | -15,49 |
| 3   | $Y^2 = 60(3) = 180$  | 13,41 | -13,41 |
| 2   | $Y^2 = 60(2) = 120$  | 10,95 | -10,95 |
| 1   | $Y^2 = 60(1) = 60$   | 7,74  | -7,74  |
| 0,5 | $Y^2 = 60(0,5) = 30$ | 5,47  | -5,47  |
| 0   | $Y^2 = 60(0) = 0$    | 0     | 0      |

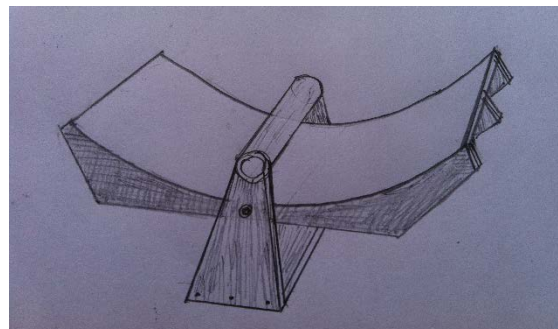
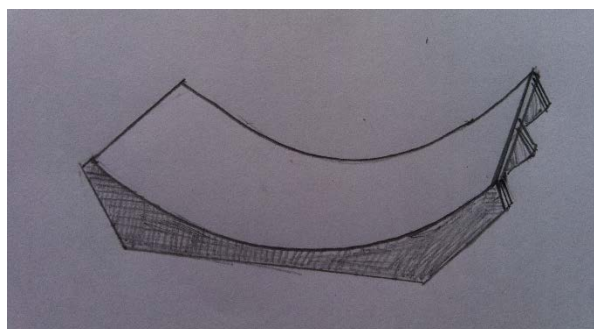


## SEGUNDO

Ahora, grafica un sistema coordenado sobre una superficie (por ejemplo, cartón o cartulina) y asegúrate de que los ejes estén en escuadra ( $90^\circ$ ). Haz la graduación de los ejes en centímetros. Luego, ubica estos puntos en ese sistema coordenado y, con cuidado, une esos puntos y obtendrás una parábola de unos 60 centímetros de apertura. (En la tabla se han tomado algunos puntos, pero puedes considerar más puntos para que la curva sea más precisa.) Entonces, lo que obtendrás es el perfil de la parábola cilíndrica.

## TERCERO

Ahora que tienes el perfil de la parábola, consigue unas planchas de triplay u otro material similar, para marcar este perfil. Corta el perfil de la parábola de la cartulina con precisión y después marca sobre el triplay esta misma curva y procede a cortar. ¡Como siempre, cuanto más precisión tengamos en la tarea más eficiente será nuestro concentrador! Puedes fabricar unos tres o cuatro perfiles como en el dibujo que se muestra arriba, que puedes pegar para que sean más robustos. Sobre esa estructura, coloca una superficie reflectante; puede ser papel aluminio o una plancha de acero inoxidable de unos 70 cm de largo por unos 34 cm de ancho, como en el siguiente dibujo esquemático:



**¡Tu concentrador solar está listo!** Puedes poner en el foco (a 15 cm del vértice, en el centro) cualquier tipo de "horno". Puede ser cilíndrico, como en la fotografía de la página anterior (un tubo de metal con un alojamiento para cocinar, ¡o algo que no se derrita, porque allí se concentrará el calor de los rayos solares!). ¡Ahora, pon en juego tu creatividad y cocina algo con energía limpia!

## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:

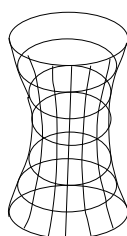
**Lo aprendido:** ¿Puedo explicar la relación entre las figuras parabólicas y el concentrador solar? Si vuelvo a mirar el gráfico del entrenamiento de vóley, ¿puedo describir qué figuras generan las trayectorias de la pelota durante el juego? ¿Qué ha sido lo más fácil y qué lo más complicado del trabajo de esta Unidad de Aprendizaje?

¡Las secciones cónicas de esta Unidad de Aprendizaje y las figuras “de revolución” sobre las que leíste en la Unidad de Aprendizaje anterior están presentes en tu pasado!

Todas estas vasijas y recipientes que puedes apreciar no solo son artísticos o útiles, sino que además tienen precisión matemática. ¡Dales una mirada a estos gráficos y cuéntales a tus familiares lo que has descubierto!



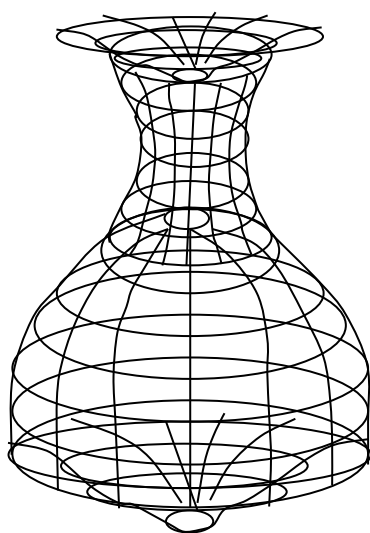
*P'uyñu*



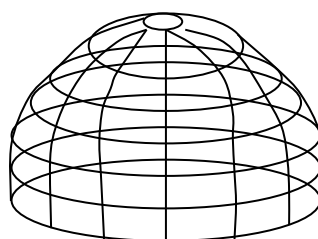
Hiperboloide elíptico



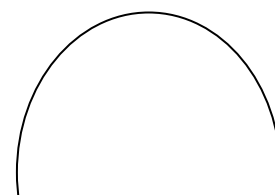
Hipérbola



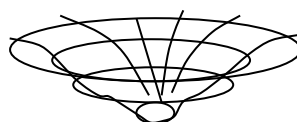
*P'uyñu cónico*



Paraboloide elíptico



Parábola



Curva polinómica en revolución



Curva polinómica

**El proceso:** ¿Fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Qué recursos utilicé para aprender y a quiénes recurrí para aprender más? ¿Será necesario coordinar con otras personas para el reto final de construir un concentrador solar?

## Unidad de Aprendizaje N.º 5

### ¿Cuán antiguo es esto?

| Área       | Duración                                                   |
|------------|------------------------------------------------------------|
| Matemática | 4 semanas: del 30 de noviembre al 29 de diciembre del 2020 |

### ¿Qué vamos a aprender?

Estimada y estimado estudiante:

Esta experiencia de aprendizaje te permitirá desarrollar las competencias y capacidades que aparecen en la siguiente tabla. Revisa los desempeños, pues son conductas verificables que debes poder realizar al terminar esta experiencia.



**Ejes:** Ejercicio ciudadano para la reducción de riesgos. / Soberanía alimentaria y productiva.

| COMPETENCIAS                                                                                                         | CAPACIDADES                                                                                                                                                                                                         | DESEMPEÑOS PRECISADOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.<br>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. | Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.<br>Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.<br>Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. | Resuelve problemas referidos a la interpretación de cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones (traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos), progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y relaciones de proporcionalidad directa e inversa.<br>Expresa su comprensión de la relación entre función lineal y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. |
| <b>FUNCIONES.</b> Representaciones gráficas de funciones. Funciones exponenciales. Funciones logarítmicas.           |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

### “Esto es importante porque...”

En la zona de Chinchaypujio (Anta) existen lugares antiguos como el centro espiritual de Qollmay, o el complejo de Lucrepampa, en Pantipata. Pero hay lugares todavía más antiguos, como la cueva de Pumawasi en Urinsaya, Parcotica, donde además se encuentran varias pinturas rupestres.



En el territorio del distrito de Chinchaypujio, así como en toda la ribera del río Apurímac, en los sectores de Ivin, Paro, Chiuchis y Chuipa, se encuentran centros de entierros. En este tipo de tumbas se pueden distinguir y ver básicamente dos tipos de restos humanos: unos similares a los que conocemos actualmente y otros con los cráneos alargados.

En la actualidad no conocemos realmente cuán antiguos son estos restos. Algunas investigaciones arqueológicas sugieren que son restos de las primeras etapas del horizonte medio y tardío; es decir, que existieron desde hace unos 1600 años. Sin embargo, estas afirmaciones no coinciden con otros restos similares como los de Ayacucho, Arequipa o Junín, donde la datación científica estima antigüedades entre 10 000 y 3000 años de antigüedad para pinturas y vestigios similares.

Basados en estas aseveraciones, hay quienes afirman que estos cráneos y centros arqueológicos tienen más de 3000 años de antigüedad.



*Cueva de Pumawasi (Anta).* Imágenes tomadas de

<http://www.rupestreweb.info/pinturaspumawasi.html>

Para conocer la antigüedad de estos restos óseos se utiliza un método que se llama *datación por radio carbono 14* (C-14). ¡Y esa técnica está basada en un concepto matemático que vas a explorar en esta Unidad de Aprendizaje! ¿Te gustaría saber cómo las matemáticas se utilizan para fechar o datar restos orgánicos? ¿Alguna vez has escuchado decir que todos los objetos (incluidos nuestros cuerpos) emiten radiaciones que se pueden medir? ¿Sabes qué se necesita para poder calcular la antigüedad de un organismo que ya murió?

**Tu reto:** Vas a asumir el papel de las **arqueólogas** y los **arqueólogos** que recurren a la matemática para poder explicar la antigüedad de los objetos que encuentran. ¡Y vas a **explicar** la posible antigüedad de algunos restos **usando conceptos y herramientas matemáticas**!

## Compartimos lo que sabemos sobre el tema

Para comenzar, vas a recurrir a las cosas que ya sabes. Como verás, hay mucha información y experiencias que has vivido que pueden ser útiles para lo que vas a aprender.

### Actividad 1: Lo que sabemos...

Anota, a manera de lluvia de ideas:

- ¿Qué es lo primero que piensas cuando escuchas la palabra “funciones”? ¿Le encuentras alguna relación con la matemática? Y si te dicen que una cosa está “relacionada” con otra, ¿eso podría referirse a un concepto matemático?
- ¿Has escuchado la expresión “eso es directamente proporcional a...” o “eso es inversamente proporcional a...”? ¿Sabes a qué se refieren esas expresiones?

## Exploramos la temática



En la naturaleza todo está relacionado. Cada ser vivo depende de otros seres y de otros elementos para vivir. Las plantas dependen del agua, de los minerales de la tierra y de la luz solar para crecer y producir alimentos. Los animales dependen directa o indirectamente de las plantas para vivir, y las plantas necesitan de los animales –sobre todo de los insectos– para proliferar. En síntesis, toda la naturaleza es un gran sistema constituido de pequeñas **relaciones** entre diferentes seres. La matemática ha descubierto y desarrollado métodos y maneras de comprender y expresar estas relaciones en las que existimos.

En matemáticas existe una forma bastante sistematizada de entender estas relaciones; la denominamos “**funciones**”, palabra que ha surgido del uso lingüístico para referirse precisamente a la interdependencia de elementos. Por ejemplo, para hacer hervir agua necesitamos calor; entonces, calentar agua es función de la transferencia de calor, y producir calor es función de un combustible que puede arder y producir calor. La lluvia es función de la evaporación del agua, y esta depende de la radiación solar.

En matemáticas entendemos todas estas interdependencias como la **interacción** entre **elementos de conjuntos**, y estamos interesados precisamente en la correspondencia entre ellos. A esta forma, manera, regla o ley de correspondencia la denominamos **función**.

A continuación encontrarás textos para ampliar estas definiciones. **Léelos** con calma y señala o **subraya las ideas clave** que te ayuden a comprender los conceptos. ¡Y recuerda que si hay algo que te genera **dudas**, puedes consultar con compañeras o compañeros, o con tus docentes!

### Actividad 2: Una primera aproximación a las funciones

#### Texto 1

#### LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS

Una función matemática de un conjunto A, en un conjunto B, es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento **x** de A exactamente un elemento **y** en B.

Como recuerdas, a una función le asignamos una letra, “f” o “g”, y la representamos como:

$$f: A \rightarrow B$$

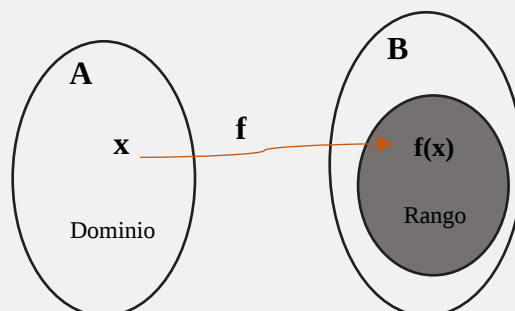
**Ejemplo 1.** Representar en forma esquemática una función.

#### ¿Cómo se hace?

Utilizamos un **esquema de conjuntos** para visualizar y representar la idea abstracta de función. En este esquema podemos notar que el conjunto A es el **dominio** de f y B es el **rango** de f. Además, como puedes ver, para una función no necesariamente el rango es todo el conjunto B, y esta es, precisamente, la característica de una función, pues a un único elemento en el rango “y” le corresponde un único elemento “x” en el dominio.

Esto se escribe como:  **$y = f(x)$**

Donde “y” es la variable dependiente y “x” la variable independiente.



**Ejemplo 2.** Escribamos un ejemplo de función e identifiquemos su dominio y rango.

### ¿Cómo se hace?

Consideremos la función  $y = f(x)$ , que describe el comportamiento de la abundancia de *mamasara* (maíz).

Un choclo de maíz blanco (el mediano, no el grande) tiene en promedio 8 hileras, y cuenta en cada hilera, en promedio, con 27 granos.

Entonces, el factor de multiplicación (*miray*, abundancia) por cada grano o semilla lo podemos expresar como una función; así:



Imagen tomada de agencia de noticias Agraria.pe

$$f(x) = 27 \cdot 8 \cdot 2(x) = 432(x) \text{ (ya que en cada planta de maíz cosechamos 2 choclos)}$$

$$\text{Entonces: } f(x) = 432(x)$$

Para un grano ( $x = 1$ ), reemplazando en la función, tendremos  $f(1) = 432(1) = 432$

Para dos granos ( $x = 2$ ), reemplazando:  $f(2) = 432(2) = 864$

Para 10 granos ( $x = 100$ ), reemplazando:  $f(100) = 432(100) = 43\,200$

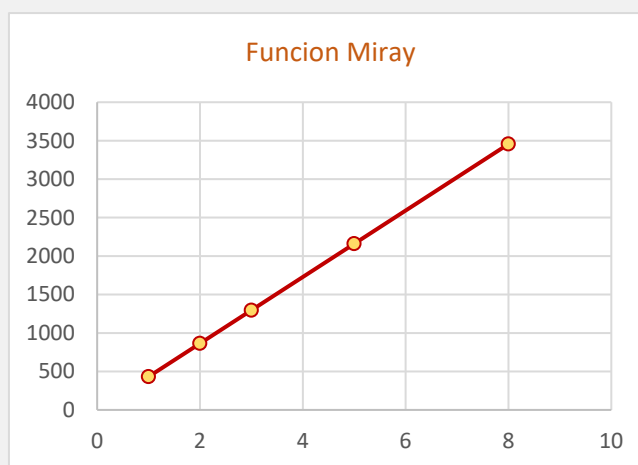
Y para nuestra chacra de 1200 granos tendremos:  $f(1200) = 432(1200) = 518\,400$

Es decir, un millar de granos se convierten en casi medio millón de granos: esa es la abundancia que la *Pachamama* le da a *mamasara* y *mamasara* nos entrega abundantemente.

En esta función ("*saramiray*"), el dominio de  $f$  son los elementos del conjunto de semillas, al que podemos asignarle la letra **A**. El rango son los choclos de la cosecha, y podemos asignarle el nombre de conjunto **S**, con  $S \subset B$  (ya que no todas las semillas se convertirán en choclos con esas características; algunos maíces muy raramente crecen con solo 4 hileras, aunque también a veces salen con más hileras).

Podemos hacer una representación gráfica para algunos de estos valores, tabulando.

| $x$ | $f(x) = 432(x)$ | $F(x) = y$ |
|-----|-----------------|------------|
| 1   | 432             | 432        |
| 2   | 864             | 864        |
| 3   | 1296            | 1296       |
| 5   | 2160            | 2160       |
| 8   | 3456            | 3456       |



En el ámbito de las matemáticas, las funciones son el elemento central sobre el que surgen propiedades y aplicaciones casi para todos los propósitos de la ciencia, de la ingeniería, la informática, la estadística, la economía, la tecnología y más. Existe toda una gama y tipos de funciones, que trabajan básicamente con números reales (funciones reales) y que podemos clasificar en funciones algebraicas y funciones trascendentes.

## Texto 2

### FUNCIONES ALGEBRAICAS

Las funciones algebraicas son todas aquellas funciones en las que utilizamos los términos algebraicos expresados por las operaciones aritméticas, como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación. Algunos ejemplos típicos son:

$$f(x) = 3x + 5$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

$$g(z) = 3z + \frac{4}{5z}, \text{ etcétera}$$

**Ejemplo 3.** Representar gráficamente la función:  $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

#### ¿Cómo se hace?

Esta función podemos expresarla como:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Entonces,  $f(x) = (x + 1)^2$  (se trata de una función cuadrática, una parábola cuyo origen está en el punto  $(h, k) = (-1, 0)$ ).

Para graficar podemos tabular (es decir, dar valores a  $x$  luego, a través de la función, obtener valores para  $y = f(x)$ ) (por ejemplo, podemos darnos valores para este caso, desde  $-4$ , hasta  $2$ ).

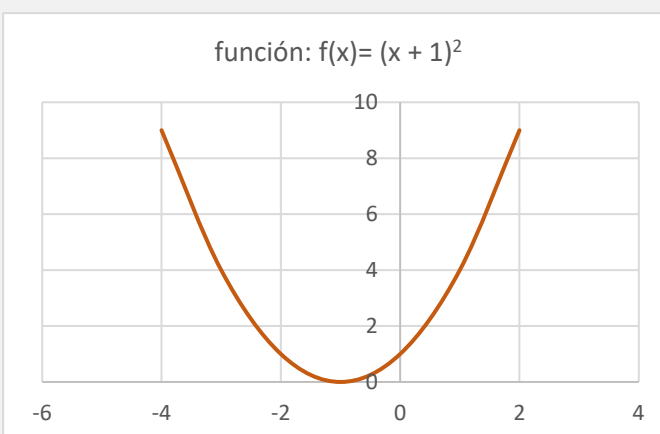
En la gráfica vemos que el dominio de la función son todos los números reales (si es que no le ponemos alguna restricción a los valores de  $X$ ), y el rango de la función son todos los valores correspondientes a " $y$ " o  $y = f(x)$ , que estarán en el eje  $Y$ .

Y podemos expresarlo como:

$$\text{Dom}F = \{R\}$$

$$\text{Ran}F = \{0, +R\}$$

| x   | f(x) = (x + 1) <sup>2</sup>   | y = f(x) |
|-----|-------------------------------|----------|
| -4  | f(-4) = (-4 + 1) <sup>2</sup> | 9        |
| -3  | f(-3) = (-3 + 1) <sup>2</sup> | 4        |
| -2  | f(-2) = (-2 + 1) <sup>2</sup> | 1        |
| -1  | f(-1) = (-1 + 1) <sup>2</sup> | 0        |
| 0   | f(0) = (0 + 1) <sup>2</sup>   | 1        |
| 1   | f(1) = (1 + 1) <sup>2</sup>   | 4        |
| 2   | f(2) = (2 + 1) <sup>2</sup>   | 9        |
| ... | .....                         | ...      |



**Ejemplo 4.** Representar gráficamente la función:  $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ .

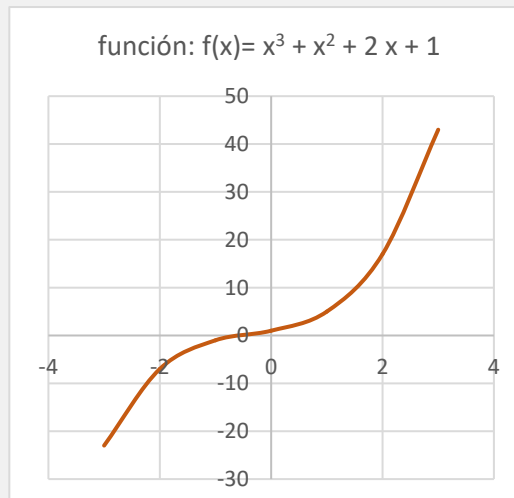
#### ¿Cómo se hace?

Tabulamos para encontrar los puntos de la función en el plano cartesiano. Para esto nos damos algunos puntos arbitrariamente (por ejemplo, desde  $-3$  hasta  $3$ ).

Como podemos apreciar, el dominio de la función es todo  $R$  y el rango también es todo  $R$ . Esta función algebraica es un tipo de función polinómica.

La gráfica de esta función la podemos apreciar en la siguiente página.

| x   | $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$           | y = f(x) |
|-----|---------------------------------------|----------|
| -3  | $f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + 2(-3) + 1$ | -23      |
| -2  | $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 2(-2) + 1$ | -7       |
| -1  | $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) + 1$ | -1       |
| 0   | $f(0) = (0)^3 + (0)^2 + 2(0) + 1$     | 1        |
| 1   | $f(1) = (1)^3 + (1)^2 + 2(1) + 1$     | 5        |
| 2   | $f(2) = (2)^3 + (2)^2 + 2(2) + 1$     | 17       |
| 3   | $f(3) = (3)^3 + (3)^2 + 2(3) + 1$     | 43       |
| ... | .....                                 | ...      |



## Verificamos lo comprendido

Ahora, **resolvamos** algunos ejercicios usando la información de los textos que acabas de leer.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

**Representa gráficamente** las siguientes funciones algebraicas:

- 1  $f(x) = 3$   
(Observa los ejemplos del texto 2; prepara primero la tabla y luego haz el gráfico.)
- 2  $f(x) = 3x - 2$   
(Observa los ejemplos del texto 2; prepara primero la tabla y luego haz el gráfico.)
- 3  $f(x) = x^2 - 3x$   
(Observa los ejemplos del texto 2; prepara primero la tabla y luego haz el gráfico.)

## Texto 3

### FUNCIONES TRASCENDENTES

Son funciones que presentan, por así decirlo, “una forma más elaborada y compacta” (que no son algebraicas). Algunos ejemplos típicos son, por ejemplo, las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas, las funciones trigonometrías inversas, entre otras).

Algunos ejemplos son:

$$F(x) = 4^x + 2$$

$$F(x) = \sin(2x - 1)$$

$$F(x) = 3 \log_5 x$$

En esta ocasión solamente vamos a enfocarnos en dos tipos de funciones trascendentes: funciones exponenciales y logarítmicas.

### LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son funciones de la forma  $F(x) = b^x$ , donde  $x$  es el “exponente” y  $b$  es

un número al que se denomina “base” (además,  $b > 0$  y  $b \neq 1$ ).  
Para comprender esto, necesitamos recordar algunas propiedades de los exponentes.

### Algunas propiedades de los exponentes:

Si A y B son números reales.

- $A^0 = 1$
- $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$
- $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$
- Si:  $A^m = A^n$ , entonces  $m = n$
- $A^{-1} = \frac{1}{A}$
- En general,  $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$



**Ejemplo 5.** Representar gráficamente la función exponencial:  $f(x) = 2^x$

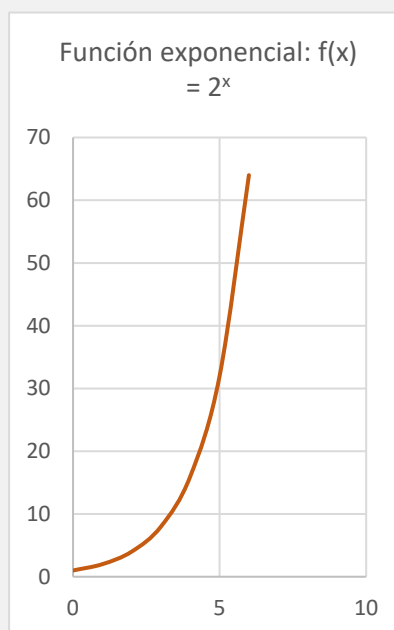
### ¿Cómo se hace?

Tabulamos para encontrar los puntos de la función exponencial.

Para esto nos damos algunos puntos arbitrariamente (por ejemplo, desde 0 hasta 6).

| x   | $f(x) = 2^x$ | $y = f(x)$ |
|-----|--------------|------------|
| 0   | $f(0) = 2^0$ | 1          |
| 1   | $f(1) = 2^1$ | 2          |
| 2   | $f(2) = 2^2$ | 4          |
| 3   | $f(3) = 2^3$ | 8          |
| 4   | $f(4) = 2^4$ | 16         |
| 5   | $f(5) = 2^5$ | 32         |
| 6   | $f(6) = 2^6$ | 64         |
| ... | .....        | ...        |

Cuya gráfica es:

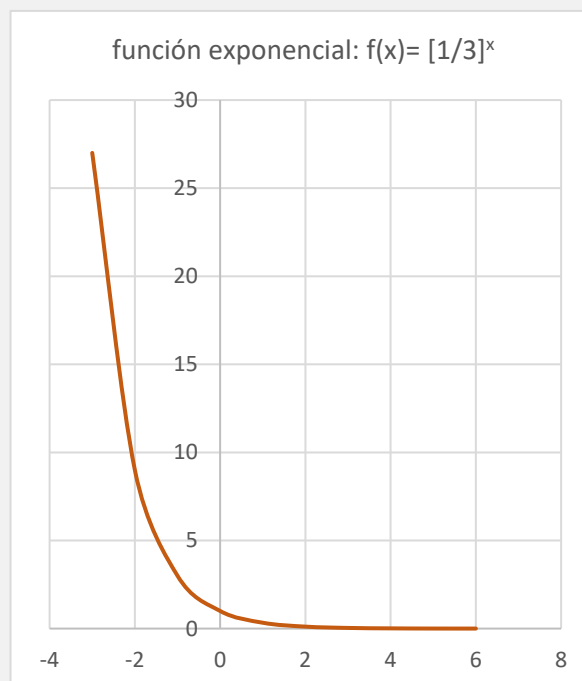


**Ejemplo 6.** Representar gráficamente la función exponencial:  $f(x) = \left[\frac{1}{3}\right]^x$

### ¿Cómo se hace?

Tabulamos para encontrar los puntos de la función exponencial. Para esto nos damos algunos puntos arbitrariamente (por ejemplo, desde -3 hasta 6) y luego graficamos sobre un sistema coordenado.

| x   | $f(x) = \left[\frac{1}{3}\right]^x$     | y=f(x) |
|-----|-----------------------------------------|--------|
| -3  | $f(-3) = \left[\frac{1}{3}\right]^{-3}$ | 27     |
| -2  | $f(-2) = \left[\frac{1}{3}\right]^{-2}$ | 9      |
| -1  | $f(-1) = \left[\frac{1}{3}\right]^{-1}$ | 3      |
| 0   | $f(0) = \left[\frac{1}{3}\right]^0$     | 1      |
| 1   | $f(1) = \left[\frac{1}{3}\right]^1$     | 0,333  |
| 2   | $f(2) = \left[\frac{1}{3}\right]^2$     | 0,111  |
| 3   | $f(3) = \left[\frac{1}{3}\right]^3$     | 0,037  |
| 4   | $f(4) = \left[\frac{1}{3}\right]^4$     | 0,012  |
| 5   | $f(5) = \left[\frac{1}{3}\right]^5$     | 0,0024 |
| 6   | $f(6) = \left[\frac{1}{3}\right]^6$     | 0,0008 |
| ... | .....                                   | ...    |



## Verificamos lo comprendido

Ahora, **resolvamos** algunos ejercicios usando la información de los textos que acabas de leer.

### EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

Representar gráficamente las siguientes funciones exponenciales:

1  $f(x) = -2^x$  (CS:  $x > 1$ )

2  $f(x) = 2^{-x}$  (Recuerda que  $2^{-x} = 1/2^x$ ; en general,  $a^{-1} = 1/a$ .)

3  $f(x) = e^x$  (Donde "e" es un número;  $e = 2.7182$ .)

Utiliza tu calculadora científica en la aplicación para obtener los resultados de los exponentes. Además, recuerda que elevar a un exponente significa multiplicar la base tantas veces como indica el exponente; por ejemplo:  $a^4 = a * a * a * a$ .

## Texto 4

### FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La función logarítmica se define como  $f(x) = \log_b x$  si y solamente si  $x = b^x$

Además,  $b > 0$  y  $b \neq 1$

Para continuar con este tipo de funciones es necesario que recuerdes algunas propiedades de los logaritmos.

### Algunas propiedades de logaritmos

Si A y B son números y b es la base del logaritmo

- $\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$
- $\log_b(A/B) = \log_b A - \log_b B$
- $\log_b A^n = n \cdot \log_b A$ , donde n es el exponente ( $n \neq 0$ )
- $\log_b \sqrt[r]{A} = \frac{1}{r} \log_b A$
- $\log_b b^x = x$



**Ejemplo 7.** Representar gráficamente la función logarítmica:  $F(x) = \log X$

#### ¿Cómo se hace?

Para encontrar la gráfica sobre el sistema cartesiano vamos a conseguir algunos puntos de esta función. Para ello, tabulamos algunos valores (ayúdate de una calculadora para encontrar el logaritmo de estas cantidades).

| x     | f(x)= logX              | y=f(x) |
|-------|-------------------------|--------|
| 1     | f(1) = log(1)           | 0      |
| 2     | f(2) = log(2)           | 0,301  |
| 3     | f(3) = log(3)           | 0,477  |
| 4     | f(4) = log(4)           | 0,602  |
| 5     | f(5) = log(5)           | 0,698  |
| 6     | f(6) = log(6)           | 0,778  |
| 10    | f(10) = log(10)         | 1      |
| 27    | f(27) = log(27)         | 1,43   |
| 100   | f(100) = log(100)       | 2      |
| 1000  | f(1000) = log(1000)     | 3      |
| 10000 | f(10 000) = log(10 000) | 4      |
| ...   | .....                   | ...    |

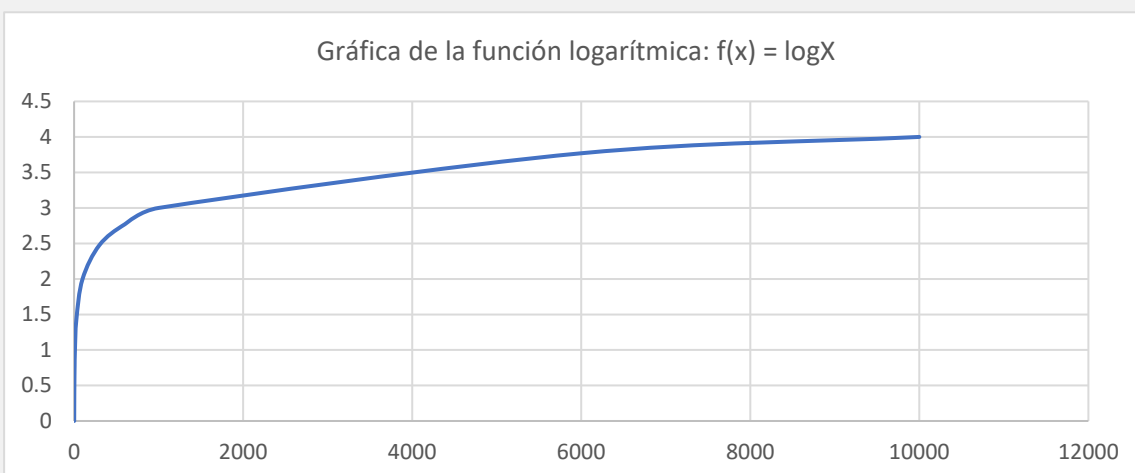
Recuerda que *log* es llamado “logaritmo vulgar” o “logaritmo decimal” porque se sobreentiende que tiene base 10.

Si  $10^2 = 100$ , entonces,  $\log_{10} 100 = 2$   
Si  $10^{0,301} = 2$ , entonces,  $\log_{10} 2 = 0,301$



La gráfica de esta función logarítmica nos muestra los valores a los que se eleva la base 10 para obtener un numero dado.

Así, por ejemplo:  $10^3 = 1000$ ;  $10^2 = 100$ ;  $10^{1,431} = 27$ ;  $10^{0,4771} = 3$ ;  $10^0 = 1$



### Ejemplo 8. Representar gráficamente la función logarítmica: $F(x) = \ln X$

#### ¿Cómo se hace?

Como en el caso anterior, tabulamos algunos valores: (de manera similar para calcular el logaritmo natural de estas cantidades, nos ayudamos de una calculadora con esta aplicación)

| x     | f(x) = lnX            | y=f(x) |
|-------|-----------------------|--------|
| 1     | f(1) = ln(1)          | 0      |
| 2     | f(2) = ln (2)         | 0,6931 |
| 3     | f(3) = ln (3)         | 1,098  |
| 4     | f(4) = ln (4)         | 1,386  |
| 5     | f(5) = ln (5)         | 1,609  |
| 6     | f(6) = ln (6)         | 1,791  |
| 10    | f(10) = ln (10)       | 2,302  |
| 27    | f(27) = ln (27)       | 3,295  |
| 100   | f(100) = ln (100)     | 4,605  |
| 1000  | f(1000) = ln (1000)   | 6,907  |
| 10000 | f(10000) = ln (10000) | 9,210  |
| ...   | .....                 | ...    |

Aquí, el logaritmo simbolizado como "ln" se denomina logaritmo natural, cuya base es el número irracional **e**, cuyo valor es:

$e = 2,718281828459....$

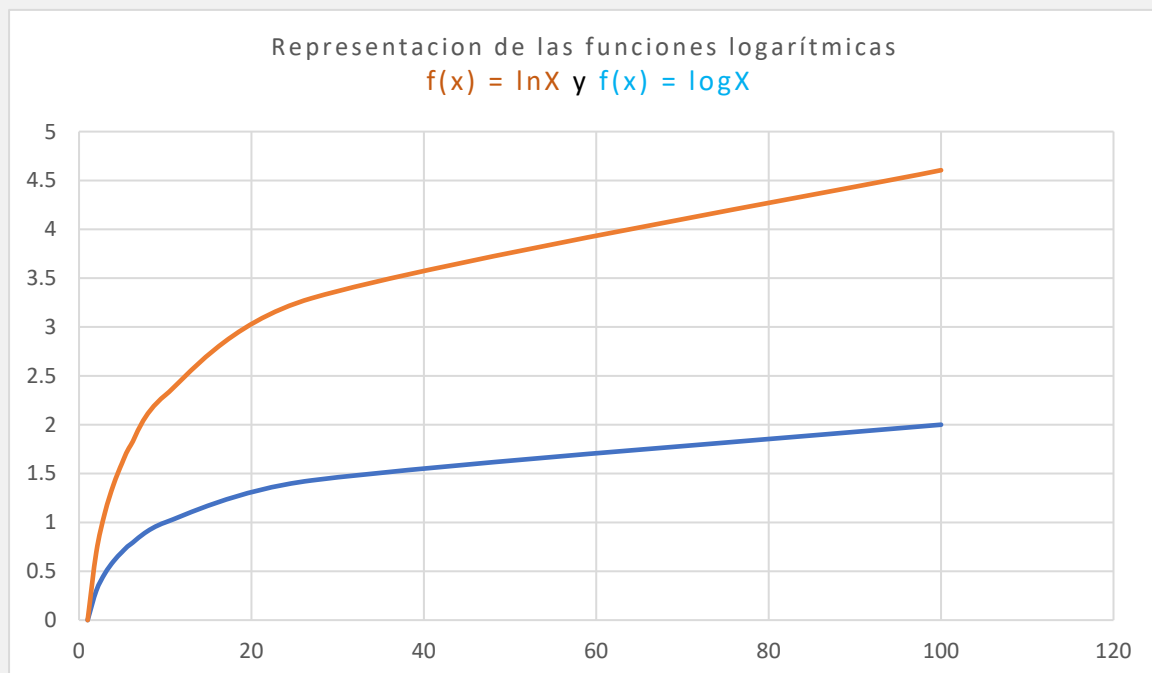
Así:  $\ln_e 100 = 4,605$

$\ln_e e = 1$

$\ln e^x = x$



En la siguiente gráfica hemos sobrepuesto la función logarítmica anterior (de base 10) con la función logarítmica denominada logaritmo natural "ln", cuya base es el número **e**. Aquí podemos ver que la curva logarítmica es similar, aunque sus valores para cada número son diferentes.



Las operaciones de potenciación y logaritmación son inversas (del mismo modo en que lo son la multiplicación y la división). Por ello, ambas son interdependientes y están presentes en muchas de las funciones de aplicación práctica en los diversos ámbitos de la ciencia y la ingeniería y otras disciplinas. Veamos dos ejemplos en los que se utiliza este tipo de ecuaciones.

**Ejemplo 9.** Un comunero regresa de Lima a Chinchaypujio contagiado de la COVID-19. Suponiendo que en Chinchaypujio hay 2000 personas entre niños, adultos y ancianos, un modelo matemático para la propagación del virus está dado por:

$$f(t) = \frac{2000}{1+1999e^{-0,8905t}}$$

Si las personas no toman ninguna medida de precaución, ¿en cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población de Chinchaypujio?

### ¿Cómo se hace?

Como podemos ver, según este modelo, para  $t = 0$  (el día cero) solo hay un contagiado (la persona que regresó de Lima).

$$f(0) = \frac{2000}{1+1999e^{-0,8905(0)}} = \frac{2000}{1+1999(1)} = \frac{2000}{2000} = 1$$

Entonces, para un día  $x$  la mitad de la población estaría contagiada, es decir, 1000 personas.

$$f(x) = \frac{2000}{1+1999e^{-0,8905x}} = 1000$$

De esta última relación, despejando  $x$ , tendremos:

$$\frac{2000}{1000} = 1 + 1999e^{-0,8905x}$$

$$\text{O, reordenando, } 1999e^{-0,8905x} = 1$$

$$\text{O también: } e^{-0,8905x} = \frac{1}{1999}$$

$$\frac{1}{e^{0,8905x}} = \frac{1}{1999} \text{ (por exponente negativo)}$$

$$e^{0,8905x} = 1999$$

Aplicando logaritmos en ambos extremos,  $0,8950x = \ln(1999) = 7,60$

Es decir,  $0,8950x = 7,60$ . Despejando  $x$ , se tiene que  $x = 7,60/0,8950 = 8,53$

Es decir, a los 8,53 días, según este modelamiento matemático, la mitad de la población estaría contagiada por el virus.

## ¡Manos a la obra!

Ahora que conoces algo más sobre las funciones exponenciales y logarítmicas, veamos uno de los múltiples ámbitos en los que podemos aplicar de manera práctica estos conceptos y propiedades matemáticas.

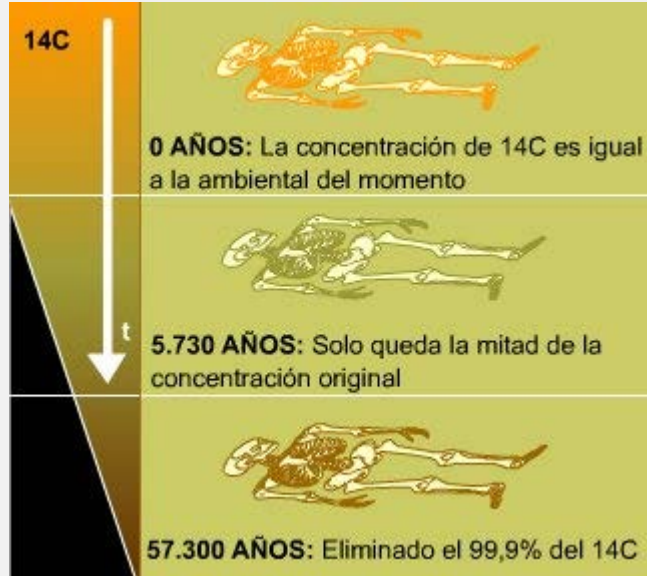
A continuación encontrarás un texto de información técnica. Léelo y subraya las ideas importantes. Luego realizarás un reto relacionado con nuestro punto de partida de esta Unidad de Aprendizaje.



## Texto de ampliación

### EL CARBONO 14 Y LAS MATEMÁTICAS

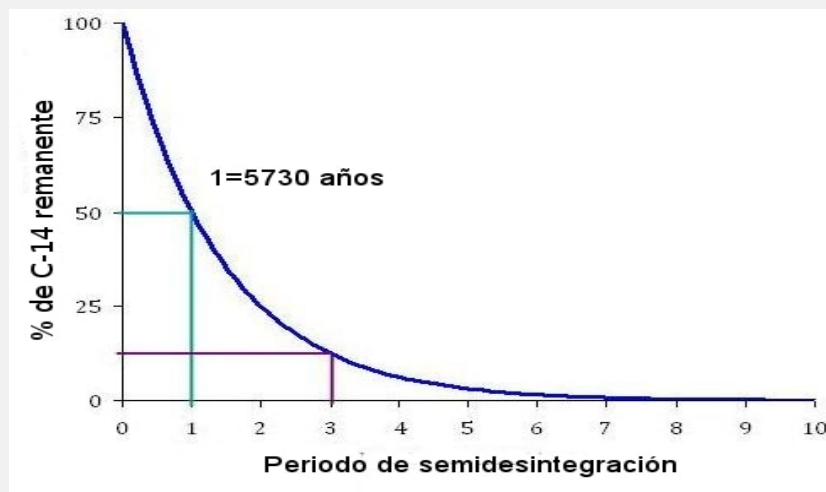
La datación por carbono 14 (C-14), por un lado, aprovecha el isótopo del carbono (un isótopo es el mismo tipo de átomo, pero con diferente número de neutrones en su núcleo).



El carbono 14 se forma continuamente en la atmósfera superior por efecto de los neutrones de rayos cósmicos sobre los átomos de nitrógeno-14, oxidándose rápidamente en el aire para formar dióxido de carbono que luego entra en el ciclo global del carbono (es decir que al final será asimilado por las plantas, luego por los animales, las personas, etcétera). Las plantas y los animales asimilan el carbono-14 a partir del dióxido de carbono durante toda su vida.

Estos organismos, cuando mueren, dejan de intercambiar carbono con la biósfera y su contenido de carbono-14 empieza a disminuir a una tasa determinada por la **ley del decaimiento radiactivo**. Este

decaimiento es precisamente lo que se utiliza para calcular la antigüedad del resto orgánico, que es una función exponencial (de exponente negativo, como el del ejemplo 6 de unas páginas atrás). La gráfica del decaimiento del C-14 es la siguiente:



En el gráfico, el punto 1 representa la vida media del remanente de C-14 en el resto orgánico, (que además está dado para una duración de 5730 años). Cada vez que pasa el tiempo, se pierde más lentamente la concentración de C-14; por ejemplo, para el punto 3, habrán pasado alrededor de 18 000 años.

Imágenes tomadas de <https://patrimoniointeligente.com/el-carbono14-en-arqueologia/> y <http://paleociencia.weebly.com/dataciones-absolutas.html>

Para calcular el tiempo de antigüedad, o realizar la datación, se necesita medir la cantidad de C-14 que aún tiene el material orgánico (hueso, cabello, piel, sangre, madera, lana, pintura, etcétera). Para ello, los laboratorios especializados cuentan con técnicas y dispositivos especiales.

Veamos a continuación un ejemplo bastante sencillo, para tener una idea precisa de cómo se calcula la antigüedad de los restos orgánicos (por ejemplo, de un tejido óseo) utilizando una función exponencial y propiedades de logaritmos.

A continuación conozcamos, a través de un ejemplo, este decaimiento de la concentración de carbono 14 (C-14).

### Ejemplo 10.

En la zona de Willcapampa se ha encontrado un cráneo alargado. Al medirse la cantidad de C-14 en este, se hallaron 220 unidades. Calcular su antigüedad aproximada.

#### ¿Cómo se hace?

Para resolver este problema primero necesitamos la función del decaimiento del C-14, que en general es el siguiente:

$$N(t) = N_0 e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

Donde la ecuación está en función del tiempo  $t$ ; además,  $N_0$  representa la cantidad inicial del C-14 en este material orgánico, y  $e$  es el número irracional ya conocido. Para este primer ejemplo vamos a utilizar valores aproximados para realizar el cálculo. Pongamos 400 unidades de C-14 al inicio del proceso del decaimiento radiactivo (su año cero). Con estas condiciones, nuestra función resulta:

$$N(t) = 400 \cdot e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

Ahora, según las condiciones que tenemos para el resto orgánico de Willcapampa,  $N(t) = 220$ , de manera que para esta concentración de C-14 han transcurrido  $t$  años. Entonces, necesitamos calcular el valor de  $t$  (para saber su antigüedad).

Con esto, nuestra función queda como:

$$220 = 400 \cdot e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

A partir de aquí, solo necesitamos realizar algunas operaciones matemáticas.

$$\frac{220}{400} = e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$0,55 = e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$\ln(0,55) = \ln(e^{-1.209 \cdot 10^{-4} \cdot t}) \text{ {Aquí aplicamos el logaritmo a ambos extremos.}}$$

$$-0,59 = -1,209 \cdot 10^{-4} \cdot t \text{ {Aquí aplicamos la propiedad: } \ln e^x = x \text{.}}$$

De aquí despejamos  $t$  y tendremos:

$$t = \frac{-0,590}{-1,209} \cdot 10^4 \text{ {Aquí el exponente negativo } 10^{-4} \text{ sube al numerador con signo cambiado.}}$$

$$t = 0,4880066 \cdot 10^4 = 0,488006 \cdot 10000 = 4880,06$$

Es decir, este resto orgánico de Willcapampa tiene al menos 4880 años de antigüedad.

Como podrás darte cuenta, las matemáticas son una herramienta potente en cualquier campo de la ciencia, en especial en las aplicaciones tecnológicas para nuestro desarrollo. Por esta razón es importante que las veas como un lenguaje para descubrir y describir a nuestra madre naturaleza, la *Pachamama*.

### ¡Ahora es el momento de resolver el reto inicial!

Si fueras una arqueóloga o un arqueólogo que debe explicarles a las personas de tu comunidad la manera en que averiguan la antigüedad de los restos humanos que encuentran, ¿qué les dirías?

- Anota qué **conceptos matemáticos** de esta Unidad de Aprendizaje podrías explicarles para que comprendan tu método de datación de los restos.
- Prepara una **presentación breve y en lenguaje sencillo** para explicar a las personas en qué consiste tu trabajo y **cómo recurre a la matemática**.
- Selecciona qué **imágenes o gráficos** podrías mostrarles para que tu presentación sea convincente.
- Anímalos a explorar el mundo de la matemática con otros ejemplos en los que esta tiene presencia y utilidad (por ejemplo, en el caso de la producción de maíz).

## Pensamos sobre nuestro aprendizaje

Considera unos minutos para pensar sobre:



**Lo aprendido:** ¿Qué sé ahora que no sabía antes? ¿Qué cosas necesito explorar más y qué dudas me quedan? ¿Lo que he visto tiene relación con experiencias de mi vida cotidiana? ¿He logrado resolver el reto para explicar de qué manera los arqueólogos y las arqueólogas recurren a la matemática en su trabajo? ¿Qué fue lo más fácil y qué lo más complicado de ese reto?

**El proceso:** ¿Fue suficiente el tiempo que destiné a esta experiencia? ¿Ha habido algo que me haya sorprendido durante el trabajo de exploración de esta Unidad de Aprendizaje? ¿A qué compañeros o compañeras puedo recurrir cuando tengo dificultades para comprender conceptos de matemáticas?

