

Las matemáticas ancestrales y la *yupana*

Albert Einstein solía repetir que les debemos mucho a los indios (hindúes), porque nos enseñaron a contar, sin lo cual no se habría logrado ningún descubrimiento que valga la pena. En estas páginas se exploran brevemente las matemáticas en el contexto andino, con énfasis en la *yupana*, un instrumento de cálculo ancestral que viene siendo investigado y aplicado en la formación matemática de los niños y niñas. La relación entre culturas y matemática está esperando teorías y estudios como el que a continuación presentamos.

JESÚS RÍOS MENCIA
Matemático

Las matemáticas, como el lenguaje, representan manifestaciones inherentes al intelecto humano; no son sino una consecuencia de la necesidad de expresar el pensamiento, el razonamiento lógico frente a las otras necesidades básicas o sociales y del entorno que las impulsan y las encauzan. El lenguaje en el que se ha desarrollado, separando las signografías regionales, es básicamente el mismo y de carácter universal; por eso sorprende saber que no existe un pueblo que no haya desarrollado matemáticas en alguna medida y con algún grado de abstracción, y esto mismo en proporción a su propia complejidad social. La evolución de las matemáticas es permanente en el tiempo: desde sus inicios hasta hoy presenta esta misma dinámica.

La civilización más antigua de América del Sur tiene, oficialmente, alrededor de 5 000 años de antigüedad; pero la aparición del conocimiento necesario para construir

con simetría, orientación astronómica, formas geométricas, estadísticas, contabilidad, entre otros elementos necesarios para crear este tipo de recintos y sociedades, no pudo ser espontánea: antes de este proceso se requiere necesariamente desarrollar conocimientos como las matemáticas.

Desde este punto de referencia en el tiempo podemos darnos cuenta de que con anterioridad a la “edificación” de estos lugares han tenido que generarse necesariamente ideas y conocimientos teóricos que fueron desarrollados con anterioridad a la etapa del diseño, del trazo y de la construcción misma; luego están las influencias y contribuciones de los señoríos, pueblos, naciones y culturas emergentes, que amplían, mejoran y concretan, con sus particulares estilos, los conceptos geométricos. Así, con el transcurrir de miles de años emergió una amplia disciplina matemática.

Por ejemplo, en la época Inca los *kamaq* (hombres especializados en alguna disciplina) debieron conocer muchas propiedades para resolver problemas geométricos tanto para la construcción como para aspectos intrínse-

cos como el cálculo de áreas, superficies, distancias geodésicas, distancias celestes, entre muchos otros. Incluso para problemas más abstractos, si ponemos en perspectiva el conocimiento matemático, podremos notar que si bien la geometría es una herramienta básica para desarrollar la astronomía y otras disciplinas de aplicación e investigación; a su vez, para dar soporte a la geometría, así como a las otras disciplinas, hace falta una matemática para el cálculo numérico, es decir, lo que actualmente denominamos "aritmética". Además, éste es uno de los pilares fundamentales de la matemática en cualquier tiempo para el desarrollo de la ciencia en general, lo que implica el surgimiento unívoco y unívoco de estas disciplinas en el tiempo.

El Templo de Coricancha, en la ciudad del Cusco, este recinto proyectado con orientación solsticial, construido en andesita para deflectar el campo magnético terrestre, con distribución geométrica simétrica, entre otras características, representa una muestra de la evolución del conocimiento científico andino, generado por las mentes de los científicos incaicos.

En estos últimos años, en el escenario internacional las culturas ancestrales, especialmente la andina (los incas) le han dado al Perú una categoría cultural y un prestigio semejante al de las culturas egipcia, griega o azteca. Por eso no solo se han convertido en un destino turístico internacional, sino que han provocado en la estructura social del Estado la transcripción de ese carisma al ámbito de la educación, como una extensión necesaria y concomitante del gentilicio por sí mismo.

Consideramos, desde este enfoque, la prerrogativa de los conocimientos de nuestros ancestros de los que todavía quedan vestigios que ahora podemos conocer y valorar, como herederos, como patrimonio cultural, como experiencia y planteamiento intelectual ancestral, único e irremplazable en el tiempo.

EL CONTEXTO DE LAS MATEMÁTICAS ANCESTRALES

Cuando hablamos de las matemáticas desarrolladas por nuestros ancestros en la civilización andina, aparece una tendencia bibliográfica casi consuetudinaria a nombrar a los incas, a los quipus y a las *yupanas* como recursos de justificación cultural y arqueológica y como argumento histórico, esencialmente para señalar los temas desarrollados por nuestros ancestros en el ámbito de las matemáticas.

De ahí que en esta parte quisiera, brevemente, mostrar algunas evidencias del conocimiento matemático para

visibilizar más específicamente a las matemáticas a las que nos estamos refiriendo. Una vez hecho esto, nos volcaremos a enfatizar el tema de la *yupana*.

LOS NÚMEROS

Una de las evidencias que se tiene hasta la actualidad, y que dio soporte a la estructura sobre la que desarrollaron sus matemáticas, es el conjunto de números y el sistema de numeración del que disponían en esos tiempos. Su origen aún no está completamente determinado, por lo que creemos que es un tema de investigación tan importante como el del origen del lenguaje mismo. Para el tiempo en que surgieron los incas, en el mundo andino ya se había establecido un sistema de numeración que, sorprendentemente, evolucionó hacia un sistema de numeración decimal, semejante al hindú y al que hoy utilizamos universalmente. En la actualidad esta numeración está presente en varios de los idiomas de los cientos que existieron, especialmente en la selva, algunos de los cuales aparecen en el siguiente cuadro:

N.º	Quechua	Aimara	Conibo	Asháninka	Kañar
1	Uq	Maya	Westiora	Aparoni	Uk
2	Iskay	Paya	Rabe	Apite	Iskay
3	Kinsa	Kimsa	Kimisha	Maba	Kimsa
4	Tawa	Pusi	Chosko	Otsi	^cusku
5	Pisqa	Qalao	Pichika	Koni	Pichqa
6	Soqta	Maqalqo	Sokota	Iko	Suqta
7	Qanchis	Paqalqo	Kanchis	Tson	Qan^cis
8	Pusaq	Kimsaqalqo	Posoka	Soti	Pusac
9	Isqon	Llatunka	Iskon	Tin	Isqun
10	Chunka	Tunka	Chonka	Tsa	^cunka

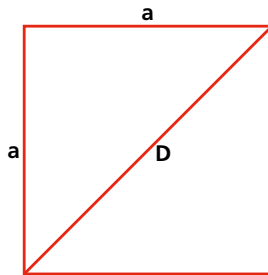
Vamos a describir el modo de contar de los matemáticos ancestrales en el modo *runasimi* (quechua), que es similar al modo aimara. Para conseguir cualquier número o cualquier cantidad se utilizaban reglas similares a las que usamos hoy. Así, por ejemplo:

- Diez unidades es un *chunca* (10).
- Dos centenas, *iscaypachaq* (200).
- Diez centenas es un *waranqa* (1 000).
- Diez *waranqas*, un *chunca waranqa* (10 000).
- 1 000 000, *jujtunaq*.
- 1 000 000 000, *jujllona*.
- Cuatro millones, *tawahunu* (*tawajunu*) o *tawatunaq* (4 000 000).
- Dos billones, *iscayjunuyjuna* o *iscayllona* (2 000 000 000), etcétera, etcétera.

ALGUNOS OTROS PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Como una muestra de los diversos problemas matemáticos que enfrentaron, no solo los incas, incluimos en esta parte algunos ejemplos.

El cuadrado: Es una de las figuras más utilizadas, casi para todo propósito. Estaba presente en la arquitectura, el arte, la religión, entre otros ámbitos. El nombre quechua para denominar al cuadrado no se conoce en la actualidad; sin embargo, de acuerdo con el *awaysimi*, es probable que lo hayan denominado *tawahawa*, *tawajawa*, *tawachiru*, *tawachijru*, según la región de donde provenía el geómetra; o como *tawachij* o *tawaj*, del que tenemos mayor certeza, ya que, por un lado, *jawa* se interpreta también como bordear o por el borde, además de referirse por fuera o afuera, y, sobre todo, de aludir estrictamente a una "superficie"; y, por otro lado, el uso consuetudinario del *runasimi* para referirse en este caso a esta figura geométrica.



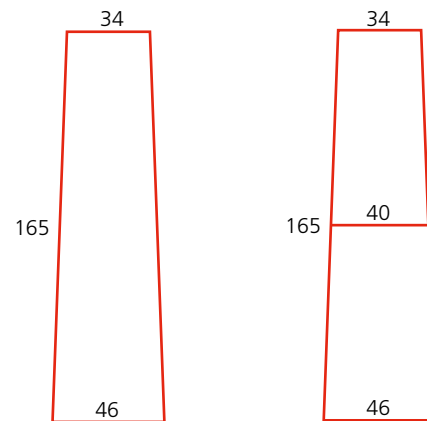
Para encontrar la diagonal en cualquier cuadrado de lado "a" procedieron con una técnica que podemos llamar "por construcción", ya que siempre que trazaban un cuadrado, al realizar las medidas y efectuar la división de la diagonal entre el lado, resultaba el número 1,41; número que precisamente indicaba que, sin importar las dimensiones del cuadrado, la diagonal será siempre 1,41 veces más grande que el lado del cuadrado en cuestión: $D/a = 1,41$. De manera que esta proporción con el tiempo se convertiría en un número "mítico" del mundo andino.

Este número es una aproximación centesimal del número $\sqrt{2}$ (1,414213). Aunque debemos aclarar que si bien conocían el valor de $\sqrt{2}$, de lo que hay testimonios en Chavín y otros lugares antes de los incas, esto no implica que hubieran utilizado esta simbología necesariamente; lo más seguro es que a este número le hayan asignado un símbolo en particular, debido a que era utilizado con mucha frecuencia.

La mediana del trapecio: Una de las características de las líneas notables del trapecio que conocieron y manejaron los geómetras incas fue el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos, denominado "me-

diana" en la geometría (lo que es sorprendentemente idéntico al teorema de la mediana que utilizamos en la actualidad para el trapecio isósceles).

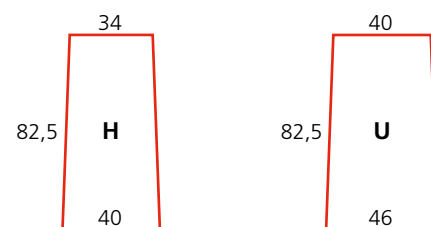
Estos hombres conocían que su medida era igual al promedio de la suma de las longitudes de la base mayor y menor (*uma* y *chaki*) del trapecio. Como ejemplo, veamos un trapecio regular que tiene las siguientes dimensiones: 165 cm cada uno de los lados no paralelos, 34 cm la base menor y 46 cm la mayor, como se muestra en el siguiente esquema:



Aplicando la propiedad anterior, encontramos que la mediana para este trapecio regular será:

$$\text{Kushkannin} = \frac{46 + 34}{2} = 40$$

Ahora tenemos un trapecio dividido proporcionalmente por la mediana que da origen a su vez a dos trapecios isósceles y regulares con base de 40 cm (digamos, para el trapecio H) y de base mayor de 40 cm (para el trapecio U).



Hemos utilizado estas dimensiones para este trapecio regular ex profesamente, ya que corresponden a las dimensiones de las "hornacinas" (*willk'alki* o *willk'ally*) de uno de los lugares más importantes del Cusco, como es el Coricancha; en efecto, con estas medidas calculadas matemáticamente en este ejemplo se presentan soberbias hornacinas trabajadas en roca andesita.



Hornacinas en el frente del recinto.

Asimismo, podemos encontrar problemas matemáticos de diversa índole, los cuales naturalmente fueron solucionados en su tiempo.

LA YUPANA

En el contexto de las matemáticas, la *yupana* es un tema bastante conocido, al menos como referencia; quizá más importante que saber cómo trazaban los incas un círculo para trisectar sus cuadrantes, o cómo realizaban el reparto proporcional, o cómo hacían sus conversiones de unidades de medida, o cómo planteaban y calculaban las orientaciones solsticiales para diseñar y construir una *sukanka* o un "Intiwatana".

No sabríamos sobre la *yupana* como un tablero si no hubiéramos conocido las crónicas de Guaman Poma de Ayala; asimismo, hemos sabido de las crónicas de Guaman Poma gracias a las investigaciones y las publicaciones realizadas en 1912 en las actas del Congreso de Americanistas de Londres, y posteriormente en 1936, cuando el manuscrito de Guaman Poma fue publicado en una "versión retocada" en edición facsímil por el Instituto de Etnología de París. A partir de aquí se han realizado sobre la *yupana* interpretaciones, propuestas y adaptaciones metodológicas, para describir su mecánica, su uso y su aplicación.

LA YUPANA EN LAS CRÓNICAS

La *yupana* también figura en los escritos de los cronistas; así, se tiene:

José de Acosta: "Tomarán estos indios sus granos y pondrán una aquí, tres acullá, ocho no sé dónde. Pasarán un grano de aquí, trocurán tres de acullá, y en efecto ellos salen con su cuenta hecha puntualísima, sin errar tilde. Si esto en él es ingenio y estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiese, que lo que yo juzgo de cierto es que en aquello a que se aplican nos hacen grandes ventajas".

Garcilaso de la Vega: "Los contadores, delante del curaca y del gobernador Inka hacían las cuentas con piedrezuelas y les sacaban tan ajustadas y verdaderas que no sé a quién se pueda atribuir mayor alabanza, si a los contadores que sin cifras de guarismos hacían sus cuentas y particiones tan ajustadas de cosas tan menudas, que nuestros aritméticos suelen hacer con mucha dificultad, o al gobernador y ministros regios que con tanta facilidad entendían la cuenta y la razón de que todas ellas les daban".

Guaman Poma de Ayala (dibujo del "contador"): "Como se podrá observar, una característica que señalan todas las crónicas es que hacían las operaciones con granos o piedrecillas (no dicen que se realizaban en quipus directamente); además, las descripciones no dan mucha información sobre el nombre del instrumento sobre el cual se realizaba la operación o del operador propiamente, menos sobre la mecánica de operación, ya que teniendo la matriz de operación ésta se puede imaginar sobre cualquier superficie; en cambio, con un tablero esquematizado tanto las representaciones como las operaciones tenían una mecánica más estricta algorítmicamente hablando".



SOBRE LA DENOMINACIÓN DE YUPANA

El término tiene una acepción interpretativa. En el *runasimi* surge de la operación de contar (*yupay* = cuenta, contabiliza, conteo, contar, etcétera); en español diríamos que una persona que teje necesita algo con qué tejer y la herramienta será un tejedor, y, por antonomasia, surgen términos biunívocos en ambos sentidos, para la herramienta y para el que ejecuta la rutina o el algoritmo para la ejecución fáctica. Al instrumento ancestral, que se utiliza para la tarea de “contabilizar” cantidades, se le ha asignado el nombre *yupana*. Pero las raíces semánticas de este término involucran conceptos en los que se basa y tiene su sustento realmente.

Por otro lado, *yupa* es un término que significa contabilizar, contar o, específicamente, realizar un conteo, por lo que a esta idea también está asociada la numeración, que además exigirá la existencia de guarismos, simbolizados o no, que es la forma natural de realizar un conteo progresivo, para tener idea y referencia concreta de lo que se está cuantificando.

Este término *yupa* se utiliza también en otro contexto, para decir algo como correcto, honesto, decente; sin embargo, esta forma de denominación también tiene su raíz en la cuantificación, ya que, por ejemplo, en el *runasimi* lo que en español se entiende como “tacaño” se expresa como *papayupa*, cuya traducción directa o estricta sería “el que cuenta las papas”, aunque en *runasimi* se está refiriendo a una persona que no es generosa, pues a pesar de que la papa es un alimento muy abundante en el mundo andino, esta persona cuenta lo que le va a dar a alguien, cuando lo correcto sería que se lo dé a manos llenas o abundantemente.

Yupaychay es otro término que se utiliza para expresar la idea de rendir culto, para homenajear u honrar a alguien, porque ha llegado el tiempo de hacerlo. Esta actividad social o espiritual se realiza porque se ha considerado que toca hacerlo, que no ha sido dejada de lado y que se la ha cuantificado. En este mismo contexto, *yupaychay* es el individuo que hace efectiva esta actividad social o espiritual, y es visto como el sujeto que rinde culto, pero refiere solo a la actividad, pues la investidura tiene nombre propio y de acuerdo con su jerarquía puede ser *Willaqhuma*, *Tarpunta*, *Yatiri*, *Paqo*, *layqa*, *Panpamisha*, etcétera. Por esto, si bien no se tiene el nombre específico de este instrumento para realizar operaciones aritméticas, *yupana* contiene raíces que denotan razonamiento y conteo y, como ya dijimos, se ajusta bien a lo que sobre este instrumento se realizaba.

En cuanto al término *kamaq*, en esta forma hace referencia al “creador” (la energía de sabiduría e inteligencia del cosmos); sin embargo, en otras de sus formas, como *kamayoq*, alude a un especialista que domina un tema, una disciplina, o que tiene una habilidad particular. Esta raíz muestra además una jerarquización, ya que un *kamayoq* es un especialista y un *kamaq* está en mayor nivel no solo de especialización sino también de causa y conocimiento.

Ahora: para aclarar un poco el matiz de estos términos, podemos decir que *yupaykamaq* equivale a lo que conocemos actualmente como un matemático, digamos, con un grado académico “tope”; y un *yupaykamayoq* sería un matemático especializado en un tema específico.

SOBRE SU INTERPRETACIÓN

A partir de 1931, muchos investigadores han realizado diversas interpretaciones para “descubrir” la mecánica de la *yupana*. Algunos de los primeros fueron Henry Wassen (1931), Carlos Radicati de Primeglio (1950-1965), Emilio Mendizábal Losack, que dedicó a la *yupana* uno de los capítulos de su tesis doctoral escrita en 1971, Hugo Pereyra, William Burns Glynn, Faustino Ccama, que en su artículo “Ábaco andino, instrumento andino ancestral de cómputo” describe las instrucciones de una *yupana* etnográfica del pueblo de Itujata, en Potosí, Bolivia. En el Perú, la doctora Marta Villavicencio ensaya en 1986 una adaptación pedagógica sobre la *yupana*, para introducirla en el sistema educativo. En el Cusco, un grupo de científicos quechuas comienza, a partir de 1992, a recopilar información sobre el conocimiento científico ancestral en las raíces mismas de nuestra cultura andina. Decenas de pueblos altoandinos en las diferentes provincias son visitados para investigar sobre los algoritmos de las operaciones aritméticas ancestrales. Estábamos interesados en saber cómo eran estos algoritmos ancestrales, no queríamos una interpretación; luego, en febrero del 2012 se publican los hallazgos para los *runas*. A continuación compartimos algo de esta información.

LA YUPANA ANCESTRAL

Siguiendo el algoritmo sobre la *yupana* encontramos, esencialmente, dos cosas. Primero, que en el tiempo de los incas existían formas de realizar operaciones aritméticas bajo un mismo algoritmo, sobre una *yupana* que se imagina trazada sobre el “suelo”. Y, segundo, que se realiza sobre una matriz como el tablero que era uti-

DM	○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
UM	○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
C	○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
D	○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
U	○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
	<i>patanraqui</i>			<i>P.R.</i>

lizado por los especialistas. La primera era realizada por cualquier persona que ahora denominaríamos "culto", instruida, o con educación. Este tablero es una versión más sofisticada de otro tipo de *yupana* denominada *escaques* que utilizaban los primeros investigadores alrededor de 1869 para sus operaciones aritméticas, y cuyo origen se remontaría a unos 2500 años antes de los incas.

Este instrumento, que vemos en el dibujo del "cronista", consiste en un tablero de cuatro columnas y cinco filas. Cada casilla presenta pequeños círculos de 5, 3, 2 y 1 elementos, respectivamente, como se puede apreciar a continuación.

Aquí la primera fila (empezando de abajo) es para las unidades, la siguiente para las decenas (*chunka*), y la siguiente para las centenas (*pachaq*), millares (*waranqa*) y decenas de millar (*chuncawaranqa*), respectivamente. Si es necesario o se operan números más grandes o de mayor orden, se asigna un nuevo valor de orden a la primera fila; digamos, continuando con la centena de millar (*pachaqwaranqa*); a continuación, en la fila superior se tendrá la unidad de millón (*junu* o *tunaq*, según la región) y terminará en la última fila con un millar de millón (*waranqatunaq*), respectivamente. Es decir, se podía dar una nueva equivalencia a cada una de éstas.

Otra posibilidad consistía en colocar un tablero similar encima o a continuación del primero; con esto los matemáticos podían "ampliar" la *yupana*. Creemos, además, que existían *yupanas* más especializadas en las que se podían realizar operaciones aritméticas más elaboradas y complicadas y con números grandes. Incluso, se podían realizar otras operaciones aparte de las cuatro básicas.

Por otro lado, no debemos perder de vista que el dibujo de Guaman Poma no indica un tipo estandarizado de instrumento; es decir, la representación que muestra el dibujo del quipu (*kjipu*), por ejemplo, no determina ni el tipo ni la forma de todos los quipus utilizados en toda una época, ni siquiera solo el utilizado en el tiempo de los incas.

Otra característica que se observa en esta *yupana* es que cualquier número entre el 1 y el 10 (y en cualquier unidad) se puede conseguir con las tres primeras columnas, como lo indican los puntos en cada casilla (columnas en las que se generan los números, llamadas *taqe*, o, más específicamente, *patanraqui*, donde se ponen o colocan los números).

La cuarta columna, para el tipo de "*yupana* de suelo" (la que está a la derecha, formada de casillas de un solo punto o círculo), es como una especie de "columna comodín", que sirve o se utiliza para reemplazar 5 unidades con un solo grano (*pisqa rantin* = P.R.), como lo notamos en el esquema anterior.

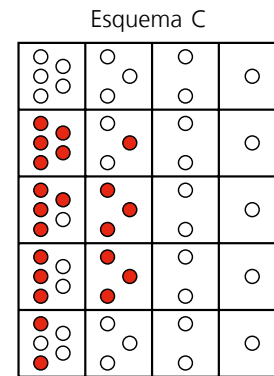
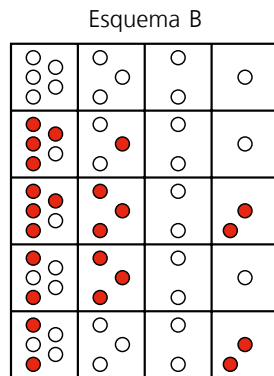
Para describir el algoritmo, realicemos una adición. Si queremos conocer rápidamente este algoritmo sobre la *yupana*, pongamos, para sumar, los números 4927 más 1835; entonces procedemos así:

Colocamos los granos en la *yupana* según la cantidad dada (el primer sumando): 4927. En la primera fila, la de unidades (7), representamos como un grano en PR, y en el *patanraki* o *taqe*, para la fila de las decenas, dos granos. En la fila de las centenas (9) representamos como 1 en PR y 4 en el *taqe*, y, finalmente, para los millares, 4 granos en el *taqe*. De manera que la *yupana* quedaría como se muestra en el esquema A.

Esquema A

○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
● ● ○ ○	○ ○	○ ○	○
● ● ○ ○	○ ○	○ ○	●
○ ○ ○ ○	○ ○	○ ○	○
● ● ○ ○	○ ○	○ ○	●


A continuación colocamos los granos que corresponden al otro número, 1835, de manera similar al anterior y al lado de los granos que ya se encuentran ubicados en la *yupana*. (Estamos utilizando un mismo tipo o color de granos.) Así se tendrá el esquema B.



Una vez ubicadas en la *yupana* estas dos cantidades (los granos), para realizar la suma es necesario agrupar las cantidades, es decir, los granos que están ubicados en cada fila, que corresponden a cada unidad.

Describiendo el algoritmo: Comenzamos en la primera fila de las unidades. Aquí tenemos 12 granos, dejamos 2 y subimos 10 granos a la fila de las decenas, pero aquí solo valen 1, de modo que tenemos 6 granos en esta fila de las decenas; en la fila de centenas tenemos 17 centenas, dejamos 7 y llevamos a la columna superior 10 centenas, pero en esta fila de los millares solo vale uno, de modo que son seis en total. Luego de realizar esta operación, la *yupana* queda con la siguiente configuración:

Luego, la disposición de estos granos en la *yupana* es también el resultado de la suma: 6 7 6 2 (*soctawaranqa qanchispachaq soqtachunka iskayniyuq*).

Las operaciones de resta, multiplicación y división se realizan también con algoritmos muy sencillos (los que podemos encontrar en el “Manual para el aprendizaje y el uso de la *yupana* ancestral”, edición de junio del 2012). Esta “forma” del algoritmo de operación es la que se utilizaba trazando imaginariamente la *yupana* en el suelo o en cualquier superficie; la otra forma, que denominamos “método Sansa-Inka” para diferenciarla, se realiza estrictamente sobre un tablero y es más mecánica y sofisticada. 



COMPARTIENDO SABERES YACHAYNINCHIKUNAMANTA RIMARISUN

Radio Estación Wari. 95.30 FM Huamanga, domingos de 9:00 a 10:00 a.m.

Compartiendo saberes, programa radial producido por TAREA en la región Ayacucho, busca poner en agenda la problemática educativa, y que las políticas públicas garanticen el derecho a una educación democrática, con enfoque intercultural bilingüe y medioambiental.

El programa procura fortalecer las orientaciones del Proyecto Educativo Regional de Ayacucho y que el Plan de Mediano Plazo 2012-2016 se implemente en la región, con el compromiso político de las autoridades —que debe expresarse en el presupuesto público— y la participación de toda la ciudadanía ayacuchana.

INFORMES:

TAREA ASOCIACIÓN DE PUBLICACIONES EDUCATIVAS
REGIÓN AYACUCHO
Urbanización María Parado de Bellido. Mz. J Lote 4. Huamanga
(Altura Sucre con Manco Cápac)
Teléfono (51 66) 319537
Internet: www.tarea.org.pe
<http://www.facebook.com/Programaradialcompartientosaberes>